numération : bases standards et exotiques

par Mlle Elizabeth Pereira, Mlle Fredj Narjes et Mlle Nabila Debou, élèves de 2nde du **lycée Paul Eluard de Saint-Denis (93)** et M. Ravinda Serou (1°S) du **lycée Jacques Feyder d'Epinay-sur-Seine (93)**.

enseignants :
Mme Gwenola Madec, MM. Marc Anquetil, Yves Alvez, Alain Huet, Nolwen Labbé-Poquet

chercheur :
M. François Parreau, université de Paris 13

coordination article : DEBOU Nabila

compte-rendu de parrainage :

Cet exposé nous semble bien fait dans la mesure où il rappelait ou apprenait comment passer de la base 10 à la base binaire et vice versa. Cependant pour un non-initié, la transposition de la base 2 à la numération à la Fibonacci paraît plutôt absconse. De plus il est difficile de voir sa réelle utilisation notamment pour le codage informatique face au binaire ou même à l'hexadécimal.

NB : C'est dommage qu'il n'y ait pas eu d'enquête historique sur Fibonacci. On aurait aussi pu donner d'autres applications de la suite de Fibonacci, avec le nombre d'or.

NI — Numération "à la Fibonacci" : un système de numération exotique 40

Une pesée où des poids marqués (chacun en un seul exemplaire) sont mis sur le plateau de droite pour équilibrer un "nombre-poids" placé à gauche, permet de coder les nombres avec deux signes ("oui" ou "non"). La suite de Fibonacci (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …) est un système possible de masses marquées.

Comment réaliser les opérations usuelles (addition, soustraction, …) dans un tel système ?

Des codages similaires de nombres sont maintenant utilisés pour accélérer les calculs sur ordinateur.

Bases standards.

La numération usuelle vous est présentée dans ce dossier pour introduire l'étude de la « base exotique » de Fibonacci. Nous allons vous exposer les difficultés rencontrées lors de l'étude du sujet, puis nous établirons les résultats trouvés sur le système de numération en base de Fibonacci.

Une base est le nombre de symboles (chiffres) nécessaires à l'écriture d'un nombre. La numération standard utilise la base 10. La décomposition d'un nombre en base 10 se sert des chiffres de 0 à 9 et des puissances de 10.

Exemple :

si nous prenons un nombre formé de quatre chiffres $a_3a_2a_1a_0$, sa décomposition sera $\boldsymbol{a_3}.10^3 + \boldsymbol{a_2}.10^2 + \boldsymbol{a_1}.10^1 + \boldsymbol{a_0}.10^0$.

A.N. **4207** $= (\mathbf{4}.10^3)+(\mathbf{2}.10^2)+(\mathbf{0}.10^1)+(\mathbf{7}.10^0)$
$= 4000 + 200 + 7$

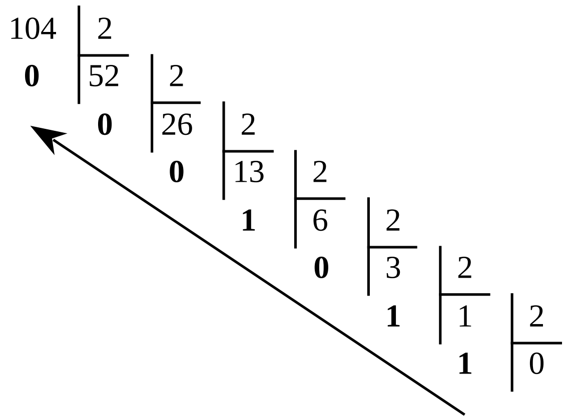
Une autre base utilisée couramment en informatique est la base binaire (base 2). La conversion d'un nombre écrit en base 10 en base 2 est la décomposition de celui-ci à l'aide du nombre 2 et de ses puissances.

Exemple :

le nombre **cent quatre** sera écrit **104** en base 10 et **1101000** en base 2 car

$$\begin{aligned}104 &= 64+32+8\\ &= (\mathbf{1}.2^6)\\ &\quad + (\mathbf{1}.2^5)\\ &\quad + (\mathbf{0}.2^4)\\ &\quad + (\mathbf{1}.2^3)\\ &\quad + (\mathbf{0}.2^2)\\ &\quad + (\mathbf{0}.2^1)\\ &\quad + (\mathbf{0}.2^0)\\ &= \mathbf{1101000}\end{aligned}$$

En utilisant le principe de la division euclidienne pour décomposer un nombre écrit en base 10 en base 2, on peut écrire une série de divisions successives en forme d'escalier. Nous obtenons alors ceci :



soit 104=**1101000** en base 2 : on prend les restes successifs des divisions **en partant du bas**.

Base de Fibonacci.

Après avoir étudié les bases standards de calcul, nous allons exposer le système du calcul dans les bases « exotiques » ou « étranges » et particulièrement dans la base de Fibonacci.

Dans la base de Fibonacci (F_n), on utilise au lieu de puissances les nombres de la suite de Fibonacci.

Rappel : on construit la **suite de Fibonacci** par la formule suivante :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

avec $n \in \mathrm{N}$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Les termes de la suite se présentent donc comme :

(1) 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144...

Il existe plusieurs décompositions d'un nombre écrit en base 10 en base de Fibonacci.

Exemple : le nombre 10 peut s'écrire

$$10 = 8 + 2 = 5 + 3 + 2 = 5 + 2 + 2 + 1.$$

Parmi toutes les décompositions possibles, nous utiliserons celle dérivant du théorème de Zeckendorf.

[On n'a rien trouvé sur Zeckendorf. Notre seule référence est la brochure de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Paris VII : *Le nombre d'or et les nombres de Fibonacci* de A. Meyer et C. Steyaert.]

Le **théorème de Zeckendorf** dit ceci :

Tout nombre entier se décompose en somme de nombres de Fibonacci distincts.

De plus, la décomposition est *unique* si on interdit d'avoir dans la somme deux nombres de Fibonacci consécutifs et si on prend les nombres de Fibonacci à partir

de F_2 (F_0 = 0 et F_1 = 1 exclus).
La ***démonstration*** de ce théorème utilise une récurrence :

Soit $P(n)$ la propriété suivante : tout entier strictement inférieur au nombre F_n (de la suite de Fibonacci) se décompose en somme de nombres de Fibonacci de la forme F_k, avec $1 < k < n$.

— $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies car :
- $P(2)$: 1=**1**.
- $P(3)$: 1=**1** et 2=**1**.2+**0**.1=**10**.

— Supposons la propriété $P(n)$ vraie à un rang n fixé ; **on démontre** $P(n+1)$:

Soit $x < F_{n+1}$.

• Si $x < F_n$, alors l'hypothèse nous permet de dire que la décomposition existe.

• Si $x \geq F_n$, on considère $x' = x - F_n$; alors :

$$F_n \leq x < F_{n+1}$$

alors

$$0 \leq x' < F_{n+1} - F_n$$

soit

$$0 \leq x' < F_{n-1}.$$

Si $x' = 0$ la décomposition est $x = F_n$. Si $x' \neq 0$ alors on sait décomposer x' d'après $P(n-1)$ donc aussi x à partir de $x = x' + F_n$.

On démontre l'unicité avec les conditions initiales. [NDLC : la démonstration est sensible aux conditions initiales ? le chaos n'est pas loin …]

Exemple : soit x = 12. Puisque 8 < 12 < 13 alors :

$$12 = 8 + (12–8) = 8 + 4$$

or 3 < 4 < 5 ; alors 4 = 3 + (4–3) = 3 + 1 donc

12 = 8 + 3 + 1, soit
12 = **10101.**

Opération dans la base de Fibonacci.

Après avoir mis en place la décomposition d'un nombre entier en base de Fibonacci nous allons entreprendre l'étude de l'addition dans cette base.

addition de 1 :

Soit $X = F_a + \ldots + F_j$

• alors $X + 1 = F_a + \ldots + F_j + 1$.
Par exemple : 18 = 13 + 5 = $F_7 + F_5$; alors 19 = 18 + 1 = 13 + 5 + 1 = $F_7 + F_5 + 1$.

• Ou alors, $X + 1 = F_a + \ldots + F_k$, $F_k > F_j$.
Par exemple : 20 = 13 + 5 + 2 = $F_7 + F_5 + F_2$ alors 21 = 13 + 5 + 2 + 1 = $F_7 + F_5 + F_3 + F_2$ = $F_7 + F_5 + F_4 = F_7 + F_6 = F_8$.

On peut écrire dans le système Fibonacci : **1**+**1**=**10**, **1**+**0**=**1** et **10**+**1**=**100** et **non pas 11** comme en binaire standard ou "machine" car la structure de la base de Fibonacci ne peut comprendre deux nombres consécutifs.

Exemple : 20 s'écrit **101010** et
20 + 1 = **101010** + **1** = **1000000** alors qu'**en binaire standard** 101010+1=101011.

addition de deux nombres.

On s'est trouvé en face de deux cas :

♦ quatre plus sept égale onze revient à :

101 + **1010** = **1111** en binaire
= **10011**
= **10100** en Fibonacci,
où on remplace à partir de la gauche chaque paire **11** par **100**.

♦ trois plus trois égale six devrait être :

100 + **100** = **1001**

or, en binaire cela fait **1000** car **1**+**1**=**10**.

Voilà où on est arrivé.

N.B. : Leonardo Fibonacci (Léonard de Pise) est un mathématicien italien, né dans les années 1175 mort approximativement en 1240. Dans son *Liber abbaci* (1202) inspiré d'Euclide et de Savasorda, il exposa les connaissances mathématiques des Arabes et introduisit l'emploi des chiffres dits "arabes", étudia les fractions continues et inventa la série récurrente dite de Fibonacci.

Soit un couple de lapins en janvier (le premier mois). Il donne naissance, en mars, à un nouveau couple et fera de même tous les mois qui suivront. Ce nouveau couple, comme tous les autres, se reproduira dans les mêmes conditions que le couple initial. En mai (le cinquième mois), par exemple, les deux premiers couples donnent naissance à deux nouveaux couples. En comptant le couple né en avril du premier couple , nous auront au total cinq couples. Ce qui donne :

n° du mois	1	2	3	4	5	…
nb de couples	1	1	2	3	5	…

d'où la suite de Fibonacci.

Bibliographie :

• Dictionnaire *Robert 2*
• *Le nombre d'or et les nombres de Fibonacci* de A. Meyer et C. Steyeart, IREM Paris VII.

[NDLC : c'était le NB de réponse au NB des parrains.]