Les nombres surréels

Année 2018 – 2019

Maxime BELARD, Clélia DERVIEUX, Paul-Arno LAMARQUE, Léa LETHIER, Marielle LEONOWICZ et Geoffrey PETITJEAN, élèves de la classe de TS2

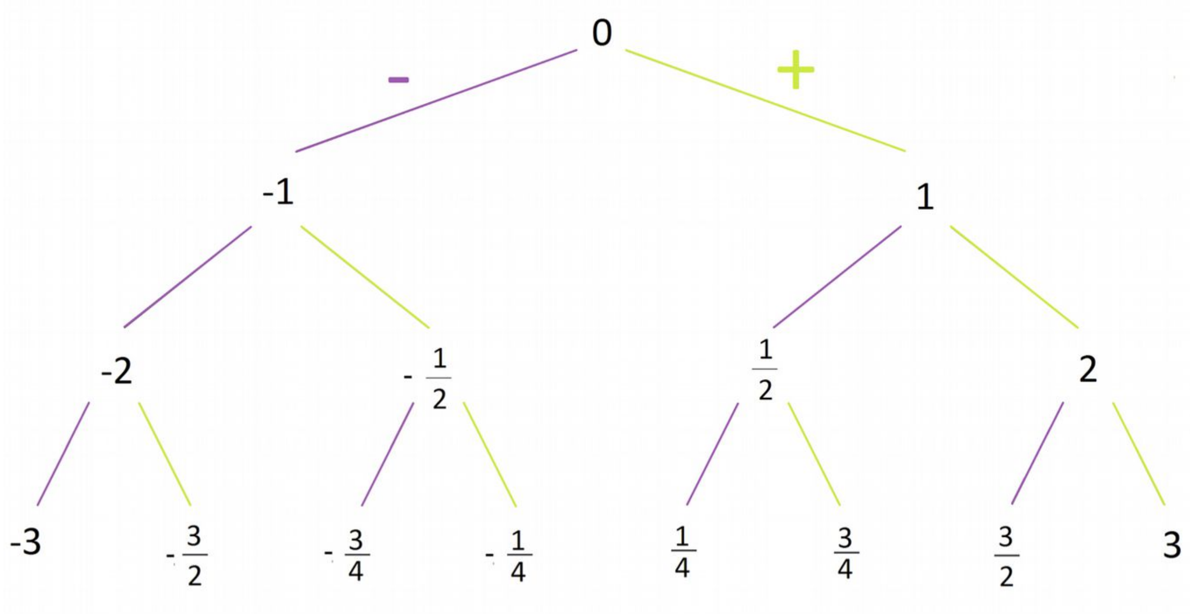
Encadrés par Aurélie DHOYER

Établissements : Lycée Jean Monnet – Blanquefort (Lycée Camille Jullian - Bordeaux)

Chercheur : Mickaël MATUSINSKI, Institut de Mathématiques de Bordeaux.

1. Présentation du sujet

L'ensemble des nombres surréels est un ensemble de nombres constitué de tous les nombres réels et d'autres nombres ordinaux. Ils peuvent s'écrire sous la forme d'une suite de symboles $\oplus$ et $\ominus$, construite à partir de l'arbre suivant.



Au commencement de l'arbre des surréels

Pour construire la suite de symboles d'un nombre, on part de 0 : si on descend à droite on note un $\oplus$ et si on descend à gauche on note un $\ominus$.
À chaque chemin sur l'arbre correspond un nombre.

Exemples : • la suite de symboles $\oplus\ominus\ominus$ correspond à $1/4$
• $-3/2$ correspond à la suite de symboles $\ominus\ominus\oplus$

Nous verrons dans l'article quels types de nombres surréels on peut définir avec cet arbre et comment on peut les additionner.

Nos recherches ont porté principalement sur l'addition de nombres surréels écrits sous forme de symboles, mais avant cela, nous avons dû comprendre quels types de nombres pouvaient être atteints par une suite finie de symboles, et la correspondance, dans les deux sens, entre une suite de symboles et l'écriture décimale du nombre.

2. Les nombres dyadiques

Définition – Nombre dyadique

Un **nombre dyadique** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un entier relatif divisé par une puissance de 2.

Théorème

Tout nombre dyadique peut s'écrire comme une suite finie de symboles et réciproquement.

Démonstration : conversion d'un point de vue algorithmique

La "conversion" est l'opération par laquelle on passe d'un nombre écrit sous forme de symboles à sa forme en écriture décimale et inversement.

¤ On considère tout d'abord un surréel écrit sous forme d'une suite finie de symboles.

S'il n'y a pas de changement de signes, le surréel est un entier relatif qui correspond au nombre de symboles qui le composent (1). Le signe de cet entier est le même que le signe des symboles. Et donc on a bien un nombre dyadique, que l'on peut écrire sous la forme "entier/2^0".

Définition – Césure

Lorsqu'on lit la suite de symboles de gauche à droite, on place un trait vertical entre les deux premiers symboles différents, que l'on appelle **césure**.

À gauche de cette césure, on aura la partie "entière", et à droite la partie fractionnaire.

Dans le cas où il y a des symboles différents, on applique la démarche suivante :

<table>
<tr><th colspan="2">Si le 1er symbole (à gauche) est un ⊖</th><th colspan="2">Si le 1er symbole (à gauche) est un ⊕</th></tr>
<tr><td colspan="2">- Le nombre est négatif
- On compte le nombre de symboles avant la césure : ce nombre correspond à la partie entière du surréel

- On initialise n à 1, n correspond au rang d'un symbole après la césure</td><td colspan="2">- Le nombre est positif
- On compte le nombre de symboles avant la césure : ce nombre correspond à la partie entière du surréel plus 1
- On initialise n à 1, n correspond au rang d'un symbole après la césure</td></tr>
<tr><td>Si au n-ième rang le symbole est un ⊖

On retranche $1/2^n$</td><td>Si au n-ième rang le symbole est un ⊕

On ajoute $1/2^n$</td><td>Si au n-ième rang le symbole est un ⊖

On retranche $1/2^n$</td><td>Si au n-ième rang le symbole est un ⊕

On ajoute $1/2^n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">On ajoute 1 à n et on réitère tant qu'il reste des symboles.</td><td colspan="2">On ajoute 1 à n et on réitère tant qu'il reste des symboles.</td></tr>
</table>

Exemple : Si on veut trouver l'écriture décimale du nombre ⊖⊖⊕⊖⊖⊕

- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕
- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕ → -2
- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕ → $-2+\frac{1}{2^1}$
- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕ → $2+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}$
- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕ → $2+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}$
- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕ → $2+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$
- ⊖⊖ | ⊕⊖⊖⊕ $=-\frac{29}{16}=-1,8125$.

Dans le cas général, le nombre s'écrit sous la forme $N+\sum_{n=1}^{k}\frac{\pm 1}{2^n}$ où N est un entier relatif et k correspond au nombre de symboles à droite de la césure. On obtient donc bien un nombre dyadique.

¤ Réciproquement, pour passer d'un surréel en écriture décimale D à son écriture sous forme de symboles S on applique la méthode suivante :

• pour les nombres entiers : on inscrit autant de symboles $\oplus$ (pour un nombre positif) ou $\ominus$ (pour un nombre négatif) que la valeur absolue de notre entier.

• pour les autres nombres on suit les étapes de ce tableau :

<table>
<tr><td colspan="2">Si D est négatif :</td><td colspan="2">Si D est positif :</td></tr>
<tr><td colspan="2">- On prend la partie entière de D qui correspond au nombre de $\ominus$ que l'on ajoute à S
- S' prend la valeur de la partie entière de D
- On initialise n à 1
(Remarque : pour n=1, on a forcément $S' < D$, ce qui fixe un premier $\oplus$, et donc un premier symbole différent de ceux d'avant)</td><td colspan="2">- On prend la partie entière de D plus 1 qui correspond au nombre de $\oplus$ que l'on ajoute à S
- S' prend la valeur de la partie entière de D plus 1
- On initialise n à 1
(Remarque : pour n=1, on a forcément $S' > D$, ce qui fixe un premier $\ominus$, et donc un premier symbole différent de ceux d'avant)</td></tr>
<tr><td>Si $S' > D$

- On retranche $1/2^n$ à S'
- On ajoute un $\ominus$ à S'</td><td>Si $S' < D$

- On ajoute $1/2^n$ à S'
- On ajoute un $\oplus$ à S'</td><td>Si $S' > D$

- On retranche $1/2^n$ à S'
- On ajoute un $\ominus$ à S'</td><td>Si $S' < D$

- On ajoute $1/2^n$ à S'
- On ajoute un $\oplus$ à S'</td></tr>
<tr><td colspan="2">On ajoute 1 à n et on réitère tant que $S' \neq D$</td><td colspan="2">On ajoute 1 à n et on réitère tant que $S' \neq D$</td></tr>
</table>

Exemple : Si on veut trouver l'écriture symbolique de -1,8125 :

· D = -1,8125

- $S=\ominus\ominus$ et $S'=-2$ $(S'<D)$
- $S=\ominus\ominus\oplus$ et $S'=-2+\frac{1}{2^1}$ $(S'>D)$
- $S=\ominus\ominus\oplus\ominus$ et $S'=-1{,}5-\frac{1}{2^2}$ $(S'>D)$
- $S=\ominus\ominus\oplus\ominus\ominus$ et $S'=-1{,}75-\frac{1}{2^3}$ $(S'<D)$
- $S=\ominus\ominus\oplus\ominus\ominus\oplus$ et $S'=-1{,}875+\frac{1}{2^4}$ $(S'=D)$

· Donc $S=\ominus\ominus\oplus\ominus\ominus\oplus$.

Dans cette "démonstration", il aurait fallu vérifier que l'algorithme s'arrête bien pour n'importe quel nombre dyadique choisi, autrement dit que tout nombre dyadique s'écrit de manière unique comme un entier plus une somme finie de termes de la forme $\pm\frac{1}{2^n}$ (2).

3. Addition de deux nombres dyadiques

Règle d'alignement :
Lorsqu'on additionne deux nombres surréels, on les aligne par rapport à leur césure de manière à ce qu'elle soit au même niveau sur les deux nombres.

Exemple :

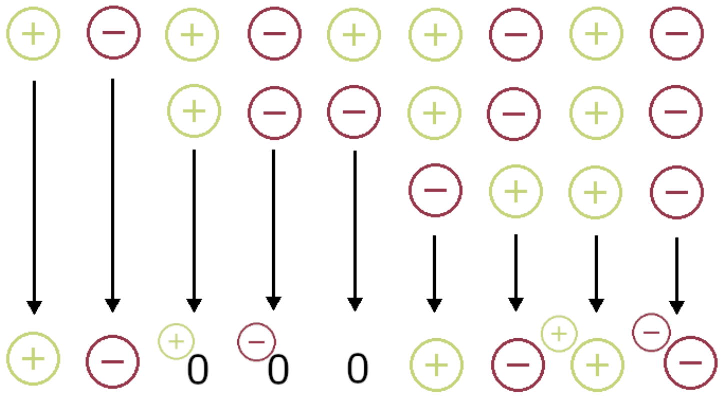
	$\oplus\oplus \mid \ominus\oplus$	donnera	$\oplus\oplus \mid \ominus\oplus$
+	$\ominus \mid \oplus\oplus\ominus$	+	$\ominus \mid \oplus\oplus\ominus$

Règle d'addition à gauche de la césure :

À gauche de la césure, on se situe dans la partie entière : si les symboles sont de même signe, ils s'accumulent, sinon chaque $\oplus$ compense un $\ominus$ et inversement. On les « barre » par paire, et on s'arrête au moment où il n'y a plus qu'un seul type de symboles présent ou s'il n'y a plus aucun symbole : dans ce cas on met un 0.

Règles d'addition à droite de la césure :

À droite de la césure, on se situe dans la partie décimale : on additionne les deux nombres colonne par colonne en commençant par la droite, selon les 9 règles d'addition suivantes :



Les exposants représentent une retenue à ajouter à la colonne de gauche.

Exemple : Si on a

$$\begin{array}{ll} & \oplus \\ + & \oplus \end{array}$$

cela donnera $^{\oplus}0$

Si, à une colonne donnée, on trouve les symboles $\oplus$ et $\oplus$, le résultat sera un 0 ainsi qu'un $\oplus$ en retenue.

Démonstration des règles d'addition à droite de la césure (3):

Règle 1 :

· $\oplus$ ou $\oplus$ + 0 → $\oplus$: $0+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$

· $\ominus$ ou $\ominus$ + 0 → $\ominus$: $0-\frac{1}{2^n}=\frac{-1}{2^n}$

Règle 1 bis :

· $\oplus\ominus\oplus$ → $\oplus$: $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

· $\ominus\oplus\ominus$ → $\ominus$: $-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}$

Règle 2 :

. $\oplus$ + $\ominus$ → 0 : $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n} = 0$

Règle 3 :

· $\oplus$ + $\oplus$ → 0 avec un $\oplus$ en retenue : $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{(n-1)}}$

· $\ominus$ + $\ominus$ → 0 avec un $\ominus$ en retenue : $-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n} = -\frac{2}{2^n} = -\frac{1}{2^{(n-1)}}$

Règle 4 :

· $\oplus\oplus\oplus$ → $\oplus$ avec un $\oplus$ en retenue : $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n} = \frac{1}{2^{(n-1)}}+\frac{1}{2^n}$

· $\ominus\ominus\ominus$ → $\ominus$ avec un $\ominus$ en retenue : $-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n} = -\frac{3}{2^n} = -\frac{1}{2^{(n-1)}}-\frac{1}{2^n}$

Règle du zéro

Une fois l'addition terminée, on doit « convertir » les 0 : on parcourt la suite de symboles de droite à gauche, et on remplace chaque « 0 » par le symbole qui se trouve à sa droite, puis lui-même change de signe.

Exemple : Si lors du calcul on a obtenu $\oplus\oplus\ 0\ \oplus\ominus$, on le convertit en $\oplus\oplus\oplus\ominus\ominus$.

Démonstration :

Soit le premier 0 à la position $n = n_0$ (en partant de la gauche).
Considérons le cas d'un groupe de k zéros suivi d'un ⊕ (le cas où le groupe de zéros est suivi d'un ⊖ est analogue). On a alors pour valeur numérique :

$$\frac{0}{2^{n_0}}+\frac{0}{2^{n_1}}+\frac{0}{2^{n_2}}+\ldots+\frac{0}{2^{n_{k-1}}}+\frac{1}{2^{n_k}} = \frac{1}{2^{n_k}} = \frac{1}{2^{n_0}}-\frac{1}{2^{n_1}}-\frac{1}{2^{n_2}}-\ldots-\frac{1}{2^{n_{k-1}}}-\frac{1}{2^{n_k}}$$

où $n_0, n_{0+1}, n_{0+2}, \ldots, n_{0+k}$ sont k + 1 entiers consécutifs, car en utilisant la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a :

$$\frac{1}{2^{n_0}}-\frac{1}{2^{n_1}}-\frac{1}{2^{n_2}}-\ldots-\frac{1}{2^{n_{k-1}}}-\frac{1}{2^{n_k}} = \frac{1}{2^{n_0}}-\frac{1}{2^{n_0}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n_0}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{1}{2^{n_0}}\left[1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right] = \frac{1}{2^{n_0}}\times\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n_0+k}} = \frac{1}{2^{n_k}}$$

Remarque : Dans le cas où il n'y a pas de symbole à droite d'un zéro, il disparaît simplement (comme un zéro à la fin de la partie décimale d'un nombre décimal).

Problème de césure

Lorsque les deux symboles de chaque côté de la césure sont de même signe, on insère un 0 entre ces deux symboles, à gauche de la césure.

Exemple : Si l'on a obtenu le résultat ⊖⊖ | ⊖⊕⊕ , cela donnera ⊖⊖ 0| ⊖⊕⊕ puis, en appliquant la règle du 0, on obtient : ⊖⊖⊖ | ⊕⊕⊕ , et la césure est bien placée (4) !

Exemple général :

⊕⊖⊖⊕⊖

\+ ⊖⊖⊕⊕⊖⊖⊖⊕

Alignement

	⊕	⊖⊖⊕⊖
+	⊖⊖	⊕⊕⊖⊖⊖⊕
	⊖	0 0⊖0⊖⊕

Règle du zéro

⊖ | ⊖⊕⊕⊖⊕⊕

Problème de césure : ⊖ | ⊖⊕⊕⊖⊕⊕ devient ⊖ 0 | ⊖⊕⊕⊖⊕⊕

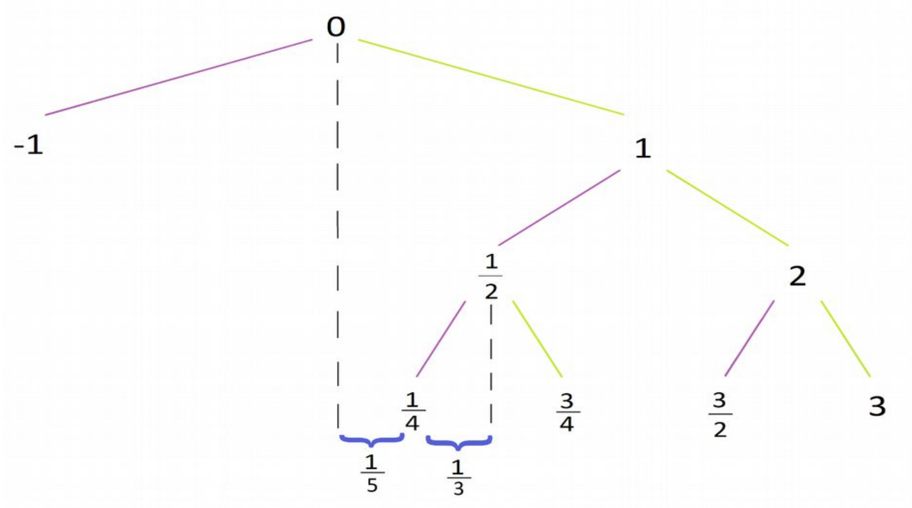
Et ainsi, le résultat final est : ⊖⊖ | ⊕⊕⊕⊖⊕⊕

Nous avons également travaillé sur l'addition des nombres comportants une infinité de symboles, en commençant l'addition par la gauche, mais on ne le détaille pas ici.

4. Vers des nombres non dyadiques

Puisque nous pouvons créer tous les nombres dyadiques, nous avons cherché s'il était possible de créer des nombres non dyadiques, comme par exemple $1/3$ ou $1/5$.

Pour l'instant nous ne savons que les positionner approximativement sur l'arbre :

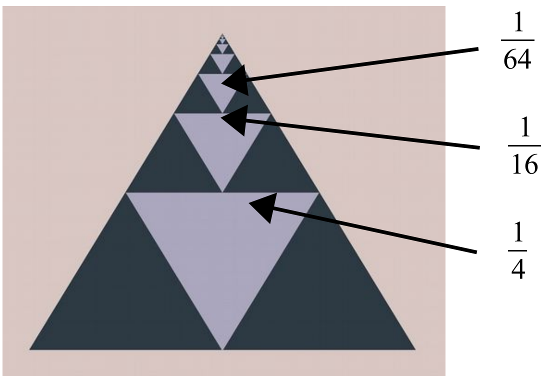


Nous avons ensuite trouvé une écriture de ces deux nombres en tant que somme infinie de puissances de nombres dyadiques :

$$\frac{1}{3}=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i=-\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^i \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{5}=3\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^i=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{3}{16^i}$$

Preuve visuelle de l'écriture de $1/3$.

Considérons un triangle équilatéral d'aire 1 découpé de la manière suivante:



Nous voyons que la somme des aires claires est égale à un tiers de l'aire totale du triangle, d'où :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\ldots=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i=\frac{1}{3}.$$

Par un raisonnement analogue, nous avons déterminé l'écriture de $1/5$ (5).

Une fois ces expressions trouvées, nous pouvons utiliser la règle du zéro vue précédemment pour les convertir en suites infinies de symboles :

$$\frac{1}{3} = \oplus\ominus\ominus\oplus\ominus\oplus\ominus\oplus\ominus\ldots$$

$$\frac{1}{5} = \oplus\ominus\ominus\ominus\oplus\oplus\ominus\ominus\oplus\oplus\ominus\ominus\oplus\oplus\ominus\ominus\ldots$$

Grâce à cela, il nous suffirait de savoir multiplier $1/5$ et $1/2$ sous forme de symboles, nous connaîtrions alors l'écriture symbolique de $1/10$ et nous pourrions ainsi connaître l'écriture symbolique de l'ensemble des nombres décimaux et rationnels, en ajoutant des multiples de $1/10$, de $1/100$, etc.

De plus, nous nous sommes demandé s'il était possible d'exprimer sous forme de symboles des nombres irrationnels ou transcendants comme $\sqrt{2}$ ou e.

Nous savons que

$$e=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}+\dots$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\dots$$

Or si nous savions multiplier les nombres surréels écrits sous forme de symboles, nous pourrions obtenir tous les termes de cette somme, et ainsi créer le nombre e, pour lequel nous supposons que l'écriture symbolique est “imprévisible” (contrairement à l'écriture symbolique de $1/3$ et $1/5$, pour lesquels on trouve une séquence qui se répète).

Ainsi il serait possible de créer au moins un nombre transcendant avec l'aide de la multiplication.

Nous pouvons maintenant conjecturer qu'il est possible d'écrire n'importe quel nombre réel avec une suite éventuellement infinie et non répétitive de symboles.

5. Conclusion

Ainsi, nous avons pu voir une méthode de création et d'opération avec les surréels. Ces nombres trouvent leurs usages notamment dans la théorie des jeux combinatoires : dans ces jeux, deux joueurs s'affrontent, aucun élément n'est caché et il ne peut pas y avoir de partie nulle. Ainsi, le jeu de Nim est un exemple de jeu combinatoire, mais pas le poker ni les échecs. Dans ces jeux, le vainqueur est souvent déterminé par l'ordre de jeu, si les deux joueurs appliquent une stratégie gagnante. Les nombres surréels permettent ici de savoir quel joueur peut gagner selon les conditions initiales.

Ces nombres peuvent également être utiles dans certaines démonstrations mathématiques.

Nous nous sommes cependant limités à un bref aperçu des possibilités de ces nombres. Nous savons passer de l'écriture décimale à l'écriture symbolique des nombres dyadiques et réciproquement, et les additionner sous leur forme symbolique ; nous avons effleuré l'existence des nombres surréels non dyadiques mais il y a encore beaucoup à découvrir sur ces nombres fascinants.

Notes d'édition

(1) Plus précisément, dans le cas où tous les symboles sont les mêmes, le nombre a pour valeur absolue le nombre de symboles.

(2) Un nombre dyadique D s'écrit $m_0/2^{n_0}$. Dans l'algorithme, à chaque étape, après avoir ajouté ou retranché $1/2^n$, S' s'écrit sous la forme $N+\sum_{k=1}^{n}\pm 1/2^k=m/2^n$, et on peut alors montrer par récurrence que $D-1/2^n<S'<D+1/2^n$. Lorsqu'on arrive à $n=n_0$ on obtient $m_0-1<m<m_0+1$ donc $m=m_0$ et $D=S'=N+\sum_{k=1}^{n_0}\pm 1/2^k$.

(3) Rappelons que les parties à droite de la césure représentent des sommes de la forme $\sum_{n=1}^{k}\pm 1/2^n$: on va les additionner terme à terme. On obtient une somme avec éventuellement des termes nuls qu'il faudra convertir (“règle du zéro”).
Les retenues (règle 4) s'appliquent aussi pour le premier terme à droite de la césure, lorsque $n=1$; dans ce cas le symbole retenu doit être ajouté à gauche de la césure.

(4) Ainsi, dans cet exemple on a remplacé $-2-1/2+\dots$ par $-3+1/2+\dots$, et le cas général est analogue.

(5) Pour calculer l'écriture de $1/5$, on peut commencer par remplacer chaque terme $\frac{3}{16^i}$ du développement $\frac{1}{5}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{3}{16^i}$ par $\frac{8-4-2+1}{16^i}=\frac{1}{2^{4i-3}}-\frac{1}{2^{4i-2}}-\frac{1}{2^{4i-1}}+\frac{1}{2^{4i}}$.