Nombres Infinis.

Depoortere Quentin, Martinel Anthonin, Pinck Coralien, Santoro Alexis

Elève du Lycée Rabelais – Saint-Brieuc

Professeur : Nguyen Nicolas

Chercheur : Guirardel Vincent

Annonce du Sujet : Nous connaissons bien les entiers naturels, nous les voyons tous les jours depuis notre plus jeune âge. Cependant, vous êtes-vous déjà demandé ce qui peut se passer lorsque l'on étudie des entiers « infinis », c'est-à-dire des entiers comportant un nombre sans fin de chiffres vers la gauche.

Annonce des résultats obtenus : Au cours de nos recherches nous avons trouvé et prouvé des théorèmes. A savoir les théorèmes suivants : **(1)**

. Opposé infini d'un entier fini

. Existence Inverses infini

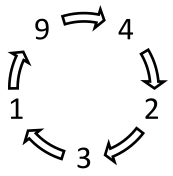
. Passage d'un nombre infini périodique à une fraction.

I – Introduction

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que n'importe quel nombre entier naturel peut s'écrire sous forme infinie en ajoutant simplement des zéros devant ce dernier :

Ainsi 42 devient : …000042

- Notations :
  - La partie périodique sera notée : P= [abcd] ou $\widetilde{\mathrm{abcd}}$
  - La partie apériodique sera notée : A=y
  - Bien que nous privilégierons d'autres notations, on peut représenter la partie périodique de manière cyclique : P= $\widetilde{42319}$ devient :



- Les règles usuelles dans ℕ s'appliquent normalement. (+/-) **(2)**
- Une première propriété étonnante :

  On remarque qu'en ajoutant 1 à …99999, on obtient …0000. Ainsi nous pouvons dire que …99999=-1
- On introduit $\dot{I}$ est l'espace des nombres infinis

1II – Propriétés de l'addition

A partir de cet exemple, nous nous sommes intéressés aux opposés. C'est-à-dire deux nombres pour lesquels la somme vaut 0.

Ainsi pour opposer 1340, nous avons cherché un nombre infini x tel que 1340+x=0.

> **Théorème : - Opposé infini d'un entier fini -**
> Soit y ∈ ℕ, avec n caractères, on a donc 10^{n-1} ≤ y < 10^{n}. **(3)**
> Soit z ∈ ℕ, tel que z = 10^{n} – y
> Alors y' = …99999 $* 10^{n}$ + z est l'opposé « infini » de y.

Interprétation :

Ainsi si l'on prend x un entier fini et son opposé infini y puis qu'on les additionne, on obtient …000.

Preuve :

Soit y $\in \mathbb{N}$, avec n caractères, $y = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$
Donc $10^{n-1} \leq y < 10^n$
On pose $z = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$ tel que $z = 10^n - y$
Soit y' tel que $y' = \dots 999 * 10^n + z$

$$y + y' = y + \dots 999 * 10^n + z$$
$$y + y' = y + \dots 999 * 10^n + 10^n - y$$
$$y + y' = \dots 999 * 10^n + 10^n$$
$$y + y' = (\dots 999 + 1) * 10^n$$

ie y + y' = 0 ainsi y = - y'
On a donc y' l'opposé de y.

Exemple :

Par exemple si l'on reprend x = 1340, on a n=4 sa longueur,
Ainsi z=10^4 – 1340 = 8660
Puis y' = …99999*10^4+8660=…999998660
En ré-additionnant le nombre infini associé à y et y' on obtient :
…000001340+…999998660 = …00000

De même, on peut définir l'opposé d'un nombre infini : il suffit de soustraire à 10 chaque chiffre composant ce nombre en tenant bien compte des retenues éventuelles.

III – Propriétés de la multiplication

1 – exemple d'introduction

Nous nous sommes ensuite intéressés à d'autres opérations usuelles : la multiplication et la division,
Et en particulier aux inverses, en effet on peut remarquer que par exemple :

Exemple :

Si l'on prend le nombre infini suivant : …666667, puis qu'on le multiplie par 3, *les opérations s'effectuant de la même façon que sur les nombre naturels*

*3 * 7 = 21 : on pose **1** on retient 2*
*3 * 6 + 2 = 20 : on pose **0** on retient 2*
*3 * 6 + 2 = 20 : on pose **0** on retient 2*
…

Et ainsi de suite, par itération, on remarque que :
…666667 * 3 = …00001
Enfin on a :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \cdots \mathbf{666667}$$

L'inverse de 3

2 – Les inverses

Nous nous sommes demandés quels nombres infinis sont inversibles, nous avons donc créé un algorithme afin d'inverser les infinis. Dans cet algorithme nous cherchons à obtenir un 1 nous avons donc conjecturé que seuls les nombres se terminant par 1 3 7 ou 9 sont inversibles, ceci se prouvant très simplement grâce à une table de multiplication :

Lemme :

Pour tout z ∈ ⟦0,9⟧, a ∈ {1, 3, 7, 9}, il existe un unique r ∈ ⟦0,9⟧, tel que : ra ≡ z [10]

Preuve :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ainsi nous avons déduis et prouvé le théorème suivant :

Théorème : - Existence Inverses -

Un entier est inversible si et seulement si son chiffre des unités vaut {1, 3, 7, 9}, son inverse infini est unique.

Preuve :

- Soit $A = \mathrm{a_n a_{n-1}} \dots \mathrm{a_2 a_1}$
  Si $\mathrm{a_1} \in \{0,2,4,5,6,8\}$
  Prenons $B = \dots \mathrm{b_n} b_{\mathrm{n}-1} \dots \mathrm{b_2} b_1$
  $b_1 * 2 \not\equiv 1\ [10]$
  $b_1 * 4 \not\equiv 1\ [10]$
  $b_1 * 5 \not\equiv 1\ [10]$
  $b_1 * 6 \not\equiv 1\ [10]$
  $b_1 * 8 \not\equiv 1\ [10]$

Ainsi si $A \equiv \{0,2,4,5,6,8\}\,[10]$ alors A n'est pas inversible

Soit $A = \mathrm{a_n a_{n-1}} \dots \mathrm{a_2 a_1}$

Si $\mathrm{a_1} \in \{1,3,7,9\}$
Prenons $B = \dots \mathrm{b_n} b_{\mathrm{n-1}} \dots \mathrm{b_2} b_1$ tel que $\mathrm{a_1} * b_1 \equiv 1\,[10]$ d'où :
Si $\mathrm{a_1} = 1\ alors\ b_1 = 1$
Si $\mathrm{a_1} = 3\ alors\ b_1 = 7$
Si $\mathrm{a_1} = 7\ alors\ b_1 = 3$
Si $\mathrm{a_1} = 9\ alors\ b_1 = 9$

On s'intéresse à présent à $\dots \mathrm{b_n} b_{\mathrm{n-1}} \dots \mathrm{b_2}$
On construit B tel que $\mathrm{a_1} b_{\mathrm{n}} + \mathrm{a_2} b_{\mathrm{n-1}} + \dots + \mathrm{a_{n-1}} \mathrm{b_2} + \mathrm{a_n} b_1 + r \equiv 0\,[10]$ avec n ∈ ℕ/{0,1} et r la retenue ∈ ℕ.

<u>Initialisation :</u> si n = 2, On peut trouver b_1 et b_2 tels que
$\mathrm{a_1} b_2 + \mathrm{b_1} a_2 + \mathrm{r} \equiv 0\,[10]$ avec r = $\left\lfloor \frac{\mathrm{a_1 b_1}}{10} \right\rfloor$ la retenue.
<u>Hérédité :</u> Soit n ∈ ℕ/{0,1}, supposons construit B tel que :
$\mathrm{a_1} b_{\mathrm{n}} + \mathrm{a_2} b_{\mathrm{n-1}} + \dots + \mathrm{a_{n-1}} \mathrm{b_2} + \mathrm{a_n} b_1 + r' \equiv 0\,[10]$ avec r' la retenue.
Au rang suivant : quelles que soient les valeurs de $\mathrm{a_1}, \mathrm{a_2}, \dots \mathrm{a_{n+1}}, r"$, on peut trouver un $b_{\mathrm{n+1}}$ tel que $\mathrm{a_1} b_{\mathrm{n+1}} + \mathrm{a_2} b_{\mathrm{n}} + \dots + \mathrm{a_n} \mathrm{b_2} + \mathrm{a_{n+1}} b_1 + r" \equiv 0\,[10]$
On a prouvé que si B était construit pour un rang donné, on pourrait le construire pour le rang suivant.
<u>Synthèse :</u> B est bien construit pour n=2 et pour les rangs suivants, c'est-à-dire B est construit pour tout n ∈ ℕ/{0,1}.

Cependant, quand cela est possible, comment trouver facilement l'inverse infini d'un entier positif ?

Théorème : - Inverses -
Soit n ∈ ℕ*, n≡1,3,7,9 [10]
On a $\frac{1}{n}$ = 0,$\tilde{P}$ dans ℚ
L'inverse de n dans $\mathbb{i}$ est l'opposé dans $\mathbb{i}$ de $\tilde{P}$

<u>Exemple :</u>
Soit $\frac{1}{37}$= 0.027027 [027]...
On construit alors le nombre infini A = ….027027027 [027]
On oppose ce nombre : -A = ….297297[297]<u>3</u>

<u>En Pratique :</u>
Ce théorème permet de trouver rapidement l'inverse dans $\mathbb{i}$ de n'importe quel n ∈ ℕ* satisfaisant la condition d'existence (voir théorème « existence inverse »).

IV – Fractions dans ⅈ

Nous avons remarqué que tous les inverses que nous avons pu calculer présentaient une partie périodique, nous avons donc cherché un lien entre les fractions et les nombres infinis périodiques, nous avons donc démontré le théorème suivant, qui permet à partir de n'importe quel nombre infini périodique présentant une partie apériodique ou non, de se ramener à une fraction équivalente :

➔ *Passer d'un nombre infini périodique à une fraction :*

Théorème :

Soit X un nombre infini périodique, on note X=...PPPA, avec P sa partie périodique et l sa longueur, A sa partie apériodique et l' sa longueur. Alors :

$$\text{X=...PPPA} = \frac{A(1-10^{l})+P*10^{l'}}{1-10^{l}}$$

Preuve : (4)

Soit X = ...PPPA

$$\begin{aligned} &= A + 10^{l'} * \ldots\text{PPP} \\ &= A + 10^{l'} * \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} P * 10^{kl} \\ &= A + P * 10^{l'} * \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} {10^{l}}^{k} \\ &= A + P * 10^{l'} * \frac{1-\ldots 000}{1-10^{l}} \end{aligned}$$

or $\sum_{k=0}^{n} x^{k} = \frac{1-x^{n}}{1-x}$

avec l > 0

D'où $\text{X=...PPPA} = A + \frac{P*10^{l'}}{1-10^{l}} = \frac{A(1-10^{l})+P*10^{l'}}{1-10^{l}}$

Lemme : (5)

Soit X un nombre infini périodique sans partie apériodique, on note X=...PPP, avec P sa partie périodique P et l sa longueur. Alors :

$$\text{X =...PPP} = \frac{P}{1-10^{l}}$$

Preuve :

On prouve ce lemme par la méthode précédente.

Exemples :

On peut ainsi trouver une fraction équivalente pour n'importe quel nombre infini périodique présentant, ou non, une partie apériodique en appliquant simplement les formules ci-dessus :

… [6]7 : P = 6, l = 1, A = 7, l' = 1

X=$\frac{7(1-10^1)+6*10^1}{1-10^1}=\frac{1}{3}$

On retrouve bien …66667 = $\frac{1}{3}$

… [9] : P = 9, l = 1

X=$\frac{9}{1-10^1}$=-1

On retrouve bien notre exemple introductif.

Un dernier exemple :

…[42319]42 : P = 42319, l = 5, A = 42, l' = 2

X=$\frac{42\left(1-10^5\right)+42319*10^2}{1-10^5}=\frac{-31942}{99999}$

-X = Y= …[57680]58

en effet …[42319]42 + [57680]58 = …000000

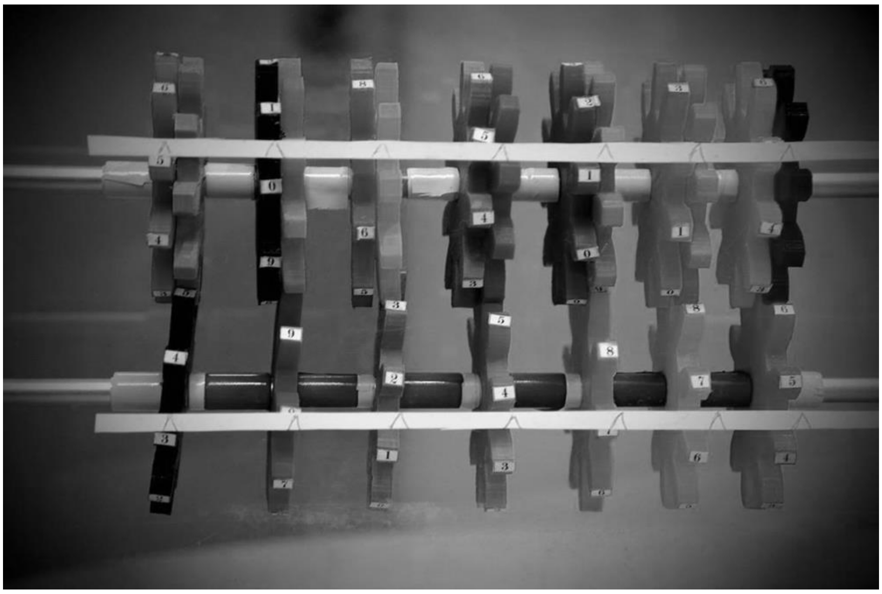
On obtient avec P' = 57680, l = 5, A' = 58, l' = 2

Y=$\frac{58\left(1-10^5\right)+57680*10^2}{1-10^5}=\frac{31942}{99999}$

Donc nous avons bien X = -Y

VI – Objet mathématique :

Nous avons dans le cadre du concourt André Parent réalisé cet objet mathématique en collaboration avec le FabLab de Saint-Brieuc et avec le financement de la Mairie. Cet objet nous permet d'obtenir un opposé infini d'un nombre à 7 chiffres. Il nous a permis de rendre plus vivant et plus concret notre sujet. **(6)**



Conclusion :

En conclusion ces recherches nous ont permis de montrer que tous les rationnels dont le dénominateur est 1, 3, 7 ou 9 possèdent une représentation unique et périodique en écriture infinie et réciproquement. **(7)** Ces recherches nous ont donc amené à réfléchir différemment sur un problème mathématique ouvert.

Annexe : Quelques algorithmes

- ➔ *Algorithme donnant la fraction équivalente de n'importe quel nombre infini périodique*

```
P=int(input("donnez votre partie périodique : "))
A=int(input("donnez votre partie apériodique ou -1 si elle n'existe pas : "))
Q=P
B=A
L=[]
M=[]
if A>0:
    while Q!=0:
        L=L+[Q%10]
        Q=Q//10
    l=len(L)
    print("longueur partie périodique : ",l)
    while B!=0:
        M=M+[B%10]
        B=B//10
    m=len(M)
    print("longueur partie apériodique : ",m)
    x=A-A*10**l+P*10**m
    y=1-10**l
    c=max(x,y)
    d=min(x,y)
    def PGCD(c,d):
        while d!=0:
            c,d=d,c%d
        return c
    x=x/PGCD(c,d)
    y=y/PGCD(c,d)
    print("votre nombre infini est exactement égal à : ",x," / ",y)
elif A<0:
    while Q!=0:
        L=L+[Q%10]
        Q=Q//10
    l=len(L)
    print("longueur partie périodique : ",l)
    x=P
    y=1-10**l
    c=max(x,y)
    d=min(x,y)
    def PGCD(c,d):
        while d!=0:
            c,d=d,c%d
        return c
    x=x/PGCD(c,d)
    y=y/PGCD(c,d)
    print("votre nombre infini est exactement égal à : ",x," / ",y)
else:
    print("votre nombre infini possède une partie apériodique composée uniquement de 0, vous pouvez simplifier votre nombre infini")
f=input("sortir ?")
```

- ➔ *Algorithme donnant l'opposé infini de n'importe quel nombre infini périodique*

```
P=int(input("donnez votre partie périodique : "))
A=int(input("donnez votre partie apériodique ou -1 si elle n'existe pas : "))
Q=P
B=A
L=[]
M=[]
if A<0:
    while Q!=0:
        L=L+[Q%10]
        Q=Q//10
    l=len(L)
    S=10**l-P
    R=10**l-P-1
    print("Votre opposé infini possède une partie Périodique P' = ",R," et une partie apériodique A' = ",S)
elif A==0:
    print("votre nombre infini possède une partie apériodique composée uniquement de 0, vous pouvez simplifier votre nombre infini")
else:
    while Q!=0:
        L=L+[Q%10]
        Q=Q//10
    l=len(L)
    while B!=0:
        M=M+[B%10]
        B=B//10
    m=len(M)
    S=10**m-A
    R=10**m-P-1
    print("Votre opposé infini possède une partie Périodique P' = ",R," et une partie apériodique A' = ",S)
```

Notes d'édition :

(1) Nous pourrions reformuler le théorème de la façon suivante :

** Existence d'un opposé pour tout nombre infini ;*

** Caractérisation des nombres infinis admettant un inverse ;*

** Égalité des nombres infinis avec partie périodiques et des fractions.*

(2) On étend l'addition (et plus tard la multiplication) en tant qu'opération symbolique : chiffre par chiffre avec propagation d'une retenue vers la gauche.

(3) Comme ce sont des nombres, nous pouvons parler de « chiffres » plutôt que de « caractères ».

(4) La formule donnant la somme d'une suite géométrique peut être reprouvée à partir des opérations de multiplications et de soustraction.

(5) Le terme de « corollaire » serait plus approprié car le résultat découle du théorème précédent et ne le précède pas.

(6) Le comité d'édition regrette de ne pas l'avoir vue en marche ☺

(7) Par « et réciproquement », il doit être compris que tous les nombres ayant une représentation infinie périodique peuvent s'écrire sans forme de fraction dont le dénominateur possède un chiffre des unités valant 1, 3, 7 ou 9.