Atelier MATh.en.JEANS – Faites de la science **2014/2015**

# Les nombres de Harshad

Dans cet article, on s'intéresse à certaines propriétés des nombres de Harshad, c'est à dire des nombres divisibles par la somme de leurs chiffres.

Elèves du lycée Beaupré d'Haubourdin:

| | |
|---|---|
| Bertrand Anna | 1S |
| Bertrand Théo | 1S |
| Dabrowski Matthieu | 1S |
| Lesieu Xavier | 1S |
| Parpaillon Thomas | 1S |
| Vaitinadin Couganadane | 1S |

Enseignant : Gaëtan Guillon

Enseignant Chercheur : Augustin Mouze (École Centrale de Lille/ Laboratoire Paul Painlevé UMR 8524 CNRS)

Plutôt que d'énoncer directement les résultats, nous avons pris le parti d'expliquer de manière chronologique les différentes étapes de notre démarche.

## *Définition – premières questions, remarques, conjectures*

*Définition*

| Un entier naturel est un nombre de Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres. |
|---|

Au fur et à mesure de la découverte du sujet, nous avons émis plusieurs remarques et conjectures (que nous avons démontrées ou infirmées) :

- Tous les entiers entre 1 et 10 sont de Harshad
- Zéro est-il un nombre de Harshad ?

  La première question est de savoir si zéro divise zéro. Elle est « choquante » au départ puisque l'on apprend depuis le collège que l'on ne peut diviser par 0.
  Après discussions et recherches sur des exemples, nous avons posé que :

  $a$ divise $b$ (noté $a \mid b$) si il existe $k \in Z$ tel que $b = ka$.

  Par exemple $6 \mid 24$ car $24 = 6 * 4$
  Avec cette définition, comme $0 = 5 * 0$, on peut dire que 0 divise 0 et que 0 est de Harshad.

- 11 est le premier entier qui n'est pas de Harshad
- Conjecture 1 : « Si $N$ se termine par 0, alors il est de Harshad ».

  Elle est fausse. En effet, 130 se termine par 0 et n'est pas de Harshad car $1 + 3 + 0 = 4$ et 4 ne divise pas 130.

- Conjecture 2 : « si $N$ se termine par 0 et si la somme des ses chiffres est impaire, alors il est de Harshad »

  Elle est fausse. 250 se termine par 0 et la somme de ses chiffres vaut 7, impair. Mais 7 ne divise pas 250.

## *Algorithme de recherche systématique des nombres de Harshad*

Nous avons commencé à la main à écrire la liste des nombres de Harshad. Pour aller plus vite, nous avons cherché à écrire un algorithme de recherche systématique.

On va successivement chercher :

- A calculer la somme des chiffres du nombre pris
- On regarde si le nombre est divisible par cette somme

*Principe d'obtention de la somme des chiffres* (*illustré avec* $x = 3456$) *:*

On compte le nombre de chiffres, et on répète autant de fois la procédure suivante : **(1)**

***Etape 1*** : on récupère le dernier chiffre

| | |
|---|---|
| On divise le chiffre par 10 ♥♠ 345,6<br>On prend la partie entière ♥♠ 345<br>On la multiplie par 10 ♥♠ 3450<br>Qu'on retire au nombre de départ : 3456 – 3450 = 6 | $y \leftarrow \xi - 10 * E\left(\frac{x}{10}\right)$ |

***Etape 2*** : on ajoute ce chiffre à la somme des précédents :

| | |
|---|---|
| $s \leftarrow s + y$ ($s$ a été initialisée à 0 au début) | $s \leftarrow s + y$ |

***Etape 3*** : on enlève à $u$ son dernier chiffre

| | |
|---|---|
| On enlève 6 à 3456 ♥♠ 3450<br>On divise par 10 ♥♠ 345 | $u \leftarrow \frac{\xi - y}{10}$ |

(***retour à l'étape 1***)

*Principe du test de divisibilité*

Pour savoir si $s$ non nul (= 18 ici) divise $x$ ( = 3456 ici), il suffit de tester si $\frac{x}{s}$ est un nombre entier ($\frac{3456}{18}$ ici).

Pour cela, on regarde si partie_entière$\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{x}{s}$

***Algorithme formalisé* :**

***Variables***

$l$, $s$, $x$, $u$, $i$ : entiers

***Entrées***

Entrer($n$)

***Traitement***

Pour $u$ allant de 0 à $n$

$l \leftarrow$ longueur ($u$)

$s \leftarrow 0$

$x \leftarrow u$

Pour $i$ allant de 1 à $l$

$y \leftarrow \xi - 10 * E\left(\frac{x}{10}\right)$

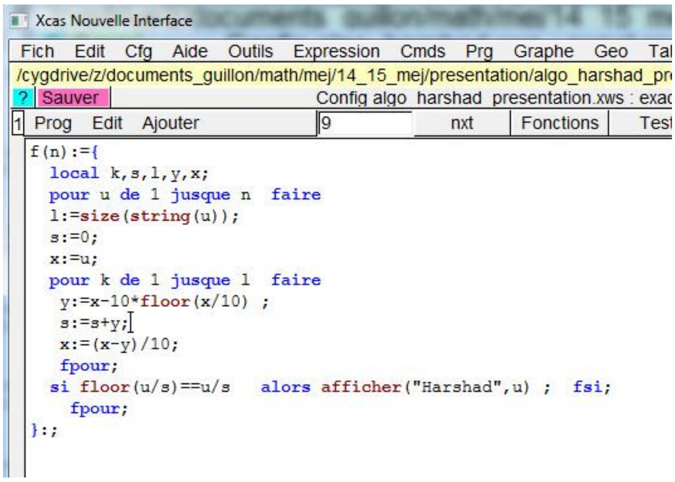
$s \leftarrow s + y$

$x \leftarrow \frac{\xi - y}{10}$

Fin du pour

Si $E\left(\frac{u}{s}\right) = \frac{u}{s}$ , alors afficher u, « est de Harshad » Fin du si

***Fin de l'algorithme***




Algorithme programmé sur Xcas

$l$ correspond au nombre de chiffres de $u$

$s$ correspond à la somme des chiffres de $u$

$x$ est une variable qui sera modifiée au fur et à mesure.

**Liste obtenue des entiers non nuls de Harshad inférieurs à 1000**

| H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 100 | 209 | 351 | 481 | 645 | 825 |
| | 2 | 102 | 210 | 360 | 486 | 648 | 828 |
| | 3 | 108 | 216 | 364 | 500 | 660 | 832 |
| | 4 | 110 | 220 | 370 | 504 | 666 | 840 |
| | 5 | 111 | 222 | 372 | 506 | 684 | 846 |
| | 6 | 112 | 224 | 375 | 510 | 690 | 864 |
| | 7 | 114 | 225 | 378 | 511 | 700 | 870 |
| | 8 | 117 | 228 | 392 | 512 | 702 | 874 |
| | 9 | 120 | 230 | 396 | 513 | 704 | 880 |
| | 10 | 126 | 234 | 399 | 516 | 711 | 882 |
| | 12 | 132 | 240 | 400 | 518 | 715 | 888 |
| | 18 | 133 | 243 | 402 | 522 | 720 | 900 |
| | 20 | 135 | 247 | 405 | 531 | 730 | 902 |
| | 21 | 140 | 252 | 407 | 540 | 732 | 910 |
| | 24 | 144 | 261 | 408 | 550 | 735 | 912 |
| | 27 | 150 | 264 | 410 | 552 | 736 | 915 |
| | 30 | 152 | 266 | 414 | 555 | 738 | 918 |
| | 36 | 153 | 270 | 420 | 558 | 756 | 935 |
| | 40 | 156 | 280 | 423 | 576 | 770 | 936 |
| | 42 | 162 | 285 | 432 | 588 | 774 | 954 |
| | 45 | 171 | 288 | 440 | 592 | 777 | 960 |
| | 48 | 180 | 300 | 441 | 594 | 780 | 966 |
| | 50 | 190 | 306 | 444 | 600 | 782 | 972 |
| | 54 | 192 | 308 | 448 | 603 | 792 | 990 |
| | 60 | 195 | 312 | 450 | 605 | 800 | 999 |
| | 63 | 198 | 315 | 460 | 612 | 801 | 1000 |
| | 70 | 200 | 320 | 465 | 621 | 803 | |
| | 72 | 201 | 322 | 468 | 624 | 804 | |
| | 80 | 204 | 324 | 476 | 629 | 810 | |
| | 81 | 207 | 330 | 480 | 630 | 820 | |
| | 84 | | 333 | | 640 | | |
| | 90 | | 336 | | 644 | | |
| | | | 342 | | | | |

Suite à ces résultats, plusieurs questions ont émergé :

- Y-a-t-il une infinité de nombres de Harshad ?

  Oui : tout entier de la forme $10^n$ = 1000..0 ($n$ zéros) est de manière évidente un nombre de Harshad car divisible par 1.

- Y-a-t-il une infinité de nombres de Harshad pairs ?

  Oui : voir ceux donnés ci-dessus.

- Y-a-t-il une infinité de nombres de Harshad impairs ?

  Oui : par exemples tous ceux de la forme 200...1

- Y-a-t-il plus de nombres de Harshad pairs que de nombres de Harshad impairs ?

  Nous avons laissé cette question en suspens.

- Y a-t-il des nombres premiers de Harshad ?

### *Recherche des nombres de Harshad premiers*

Nous avons constaté que 2, 3, 5 et 7 sont de Harshad et premiers mais n'avons pas réussi à en trouver d'autres.
Ainsi, nous conjecturons que :

| Seuls les nombres premiers inférieurs à 7 sont de Harshad. |
|---|

(2)

*Démonstration*

Soit $N$ un nombre premier de Harshad. Alors Div($N$) = {1 ; $N$}

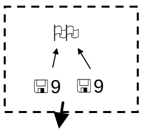
Supposons que $s(N) = 1$

Alors, soit $N = 1$, mais c'est impossible car 1 n'est pas premier,

Soit $N$ ne contient qu'un chiffre 1 et des zéros. Donc $N = 10^n$ ($n > 1$).

Or $10^n$ ($n > 1$) n'est pas premier car il est strictement supérieur à 2 et divisible par 2.

C'est donc absurde et $s(N) \neq 1$.

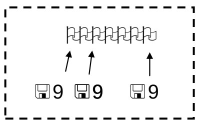


Ainsi, $\boldsymbol{s(N) = N}$

**Supposons que l'écriture de $N$ comporte 2 chiffres**, alors $s(N) < 18$ et donc $N < 18$.
Or, la somme maximum des chiffres d'un entier inférieur à 18 est de 8 + 1 = 9.
Donc $s(N) < 9$
Or, $N$ comporte 2 chiffres. Donc $N > 10$.
C'est donc absurde et il n'existe aucun nombre de Harshad dont l'écriture comporte 2 chiffres.

**Supposons que l'écriture de $N$ comporte 3 chiffres**, alors $s(N) < 27$ ($9 * 3$) et donc $N < 27$.
Or $N > 100$ (3 chiffres dans l'écriture)
C'est donc absurde et et il n'existe aucun nombre de Harshad dont l'écriture comporte 3 chiffres.

Soit $p > 3$.



**Supposons que l'écriture de $N$ comporte $p$ chiffres**, alors $s(N) < 9p$ et donc $N < 9p$.

Or $N > 10^{p-1}$ ($p$ chiffres dans l'écriture)

Donc $10^{p-1} < N < 9p$, soit $\boldsymbol{10^{p-1} < 9p}$

Et, (démo par récurrence ci-après), pour tout $p > 3$, $\boldsymbol{9p < 10^{p-1}}$

C'est donc absurde et et il n'existe aucun nombre de Harshad dont l'écriture comporte $p$ chiffres, avec $p > 2$.

Ainsi, si $N$ est un nombre premier de Harshad, son écriture ne comporte qu'un seul chiffre.

**On en déduit que les seuls nombres premiers de Harshad sont 2, 3, 5 et 7.**

*Par récurrence, démontrons que, pour tout $n > 3$, $9n < 10^{n-1}$.*

Pour tout $n > 3$, soit $P_n$ : « $9n < 10^{n-1}$ ».

*Initialisation* pour $n = 3$

$9 * 3 = 27$ et $10^2 = 100$ donc $27 < 100$ et $P_3$ est vraie.

*Hérédité.*

Soit $n > 3$ tel que $9n < 10^{n-1}$. Démontrons que $9(n+1) < 10^n$

$9(n+1) = 9n + 9$ Or : $9n < 10^{n-1}$

$9 < 10^{n-1}$ (car $n > 3$)

Donc $9n + 9 < 2 * 10^{n-1}$

$< 10 * 10^{n-1}$

$< 10^n$

Ainsi $9(n+1) < 10^n$

Donc $P_n \bullet P_{n+1}$ et, **pour tout $n > 3$, $9n < 10^{n-1}$**

### *Des nombres de Harshads consécutifs ?*

En revenant à notre liste de nombres de Harshad, nous nous sommes demandé si l'on pouvait trouver des nombres de Harshad consécutifs. La réponse est oui.

Par exemple :
- 110, 111, 112 ;
- 510,511,512,513 ;
- ceux de 0 à 10.

*Peut-on trouver une infinité de paquets de 3 nombres de Harshad consécutifs* ?

Oui : par exemple ceux de la forme 10000...0010, 10000...0011 et 10000...0012 obtenus à partir de 110, 111 et 112 en insérant $n$ nombres 0 après le premier 1.

Nous nous sommes alors demandé combien de nombres de Harshad consécutifs on pouvait trouver.

A partir de maintenant, nous mettons les démonstrations formalisées plutôt que notre cheminement chronologique beaucoup moins clair à suivre !

### *Il n'existe pas de liste de 22 nombres de Harshad consécutifs*

***Lemme*** 1 :

| |
|---|
| Soit $p$ un entier s'écrivant $ai9$, avec $a$ un entier et $i$ entier entre 0 et 8.<br>Alors $p$ et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux de Harshad |

*Démonstration* :

$p = ai9$ $p + 2 = a\,(i+1)\,1$

***Par l'absurde***, supposons que $p$ et $p + 2$ sont tous les deux de Harshad.
Alors $s(p) \mid p$ et donc $s(p)$ est impair car $p$ est impair
et $s(p+2) \mid p + 2$ et donc $s(p+2)$ est impair car $p + 2$ est impair

Or : $s(p) = s(a) + i + 9$
$s(p+2) = s(a) + i + 1 + 1 = s(a) + i + 2$

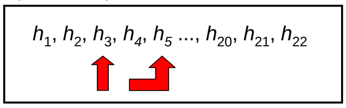
Ainsi : $s(p) - s(p+2) = 7$.
Or : la différence de deux nombres impairs est un nombre pair. Ce ne peut donc pas être 7.
C'est donc absurde : $p$ et $p+2$ ne peuvent pas être tous les deux de Harshad

*Démontrons maintenant qu'il n'existe pas de suite de 22 nombres de Harshad consécutifs.*

***Par l'absurde*** : supposons qu'il existe une suite de 22 nombres de Harshad consécutifs : $h_1, h_2, h_3, ..., h_{20}, h_{21}, h_{22}$

**Démontrons que $\forall j \in [1 ; 22]$, $h_j$ ne s'écrit pas sous la forme $ai9$ avec $i \in [0 ; 8]$.**

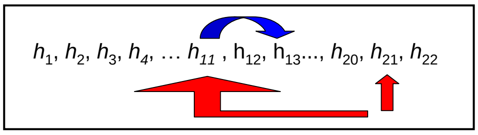
Si l'un des $h_j$ avec $\mathbf{1 < j < 20}$ s'écrivait $ai9$, alors $h_j + 2 = h_{j+2}$ ne serait pas de Harshad (d'après le Lemme 1).
Or il l'est. Donc c'est absurde.




Ainsi, aucun des $h_j$, avec $1 < j < 20$ ne s'écrit sous la forme $ai9$ avec $1 < i < 8$.

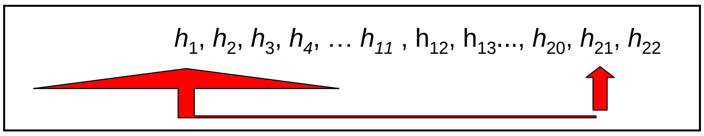
Reste à traiter le cas de $h_{21}$ et $h_{22}$. Faisons la démonstration pour $h_{21}$ (celle pour $h_{22}$ est identique).

Supposons par l'absurde que $h_{21}$ s'écrive $ai9$ avec $\mathbf{1 < i} < 8$ (nous traitons le cas $i = 0$ après)




Alors $h_{21} - 10 = h_{11}$ s'écrit $aj9$ avec $0 < j < 7$ et $h_{13}$ est de Harshad donc $h_{13}$ ne l'est pas, ce qui est absurde.

Supposons par l'absurde que $h_{21}$ s'écrive a09 (cas $i = 0$), alors $h_{21} - 20 = h_1$ est de Harshad donc $h_3$ ne l'est pas, ce qui est absurde.




Ainsi, ni $h_{21}$, ni $h_{22}$ ne sont de Harshad.

*Conclusion : Aucun des $h_j$, $1 < j < 22$ ne s'écrit pas sous la forme ai9 avec $0 < i < 8$.*

**Démontrons que $h_1$ a 9 pour chiffre des dizaines, c'est à dire qu'il s'écrit sous la forme $h_1 = a9k$**

Supposons, par l'absurde, que $h_1 = a\ i\ k$, avec $0 < i < 8$,
alors, au maximum 9 entiers plus loin, l'un des $h_j$ s'écrit $ai9$, avec $0 < i < 8$, ce qui est absurde d'après le lemme 1.

Donc $h_1$ s'écrit sous la forme $a9k$.

**Conclusion**

Même si $k = 0$ dans l'écriture précédente, la suite des nombres $h_1, h_2, h_3, ..., h_{20}, h_{21}, h_{22}$ s'écrira :
$h_1 = a90$
$h_2 = a91$
...
$h_{11} = (a+1)00$
...
$h_{20} = (a+1)09$, ce qui est absurde (car il s'écrirait sous la forme $ai9$ avec $0 < i < 8$) d'après ce qui a été démontré ci-dessus.

Si $k$ est différent de 0, l'absurdité apparaitra alors plus tôt dans la liste obtenue.

**Ainsi : il n'existe pas de liste de 22 nombres de Harshad consécutifs.**

**Nous venons donc de prouver qu'il existe au maximum 21 nombres de Harshad consécutifs.**

Notre enseignant et notre enseignant chercheur nous ont ensuite proposé des lemmes ou théorèmes à démontrer pour arriver au théorème de Grundman (1994) :

**Théorème de Grundman (1994)**

Il n'existe pas de suite de plus de 20 nombres de Harshad consécutifs.

*Lemme* 2

Soit $a \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que les nombres $a0$, $a1$, ..., $a9$ sont des nombres de Harshad.
Alors 10 divise $s(a)$

Par hypothèse,
$$\begin{aligned} s(a) &\mid a0 \\ s(a) + 1 &\mid a1 \\ s(a) + 2 &\mid a2 \\ &\dots \\ s(a) + 9 &\mid a9 \end{aligned}$$

Or, $s(a)$, $s(a) + 1$, ..., $s(a) + 9$ sont 10 entiers consécutifs. L'un d'entre eux (notons le $s(a) + j$ avec $0 < j < 9$) est divisible par 10, soit $\mathbf{10 \mid s(a) + j}$ **(1)**

De plus, $s(a) + j \mid aj$ et donc $10 \mid aj$
Or, $10 \mid a0$.

Donc $10 \mid aj - a0$, soit $10 \mid j$.
mais $0 < j < 9$ et donc $j = 0$.

En reprenant (1), on obtient que $10 \mid s(a)$

*Lemme* 3

Soit $a \in \mathbb{N}^*$.
Alors les 11 nombres $a00$, $a01$, ..., $a09$, $a10$ ne sont pas tous des nombres de Harshad.

En appliquant le lemme 2 à la suite de 10 nombres de Harshad $a00$, $a01$, ..., $a09$, on prouve que $10 \mid s(a0)$, soit $10 \mid s(a)$.
Ainsi, $\mathbf{s(a) > 10}$.

Or, la somme des chiffres de $a01$ est $s(a) + 1$ donc $s(a) + 1 \mid a01$.
la somme des chiffres de $a10$ est $s(a) + 1$ donc $s(a) + 1 \mid a10$

Par différence, $s(a) + 1 \mid a10 - a01$ donc $s(a) + 1 \mid 9$

Ainsi, $s(a) + 1 < 9$ et $\mathbf{s(a) < 8}$, ce qui est absurde puisque l'on a prouvé auparavant que $\mathbf{s(a) > 10}$.

*Théorème*

Soit $a \in \mathbb{N}^*$.
Si $aij$ est le premier terme d'une suite d'au moins 20 nombres de Harshad consécutifs, alors $i = 9$ et $j = 0$.

Soit $n_1$, $n_2$, $n_3$, ..., $n_{20}$ une suite de 20 nombres de Harshad consécutifs.
$n_1$ s'écrivant $n_1 = aij$

*Démontrons d'abord que* $i = 9$.

Par l'absurde, supposons que $i \in \{0, 1, ..., 8\}$

L'un des nombres compris entre $n_1$ et $n_{10}$ s'écrit sous la forme $ai9$ et donc (deux chiffres plus tard), d'après le lemme 1, l'un des nombres compris entre $n_3$ et $n_{12}$ ne sera pas de Harshad, ce qui est absurde.

Ainsi, $i = 9$ et $a = a9j$

*Démontrons que $j = 0$*

Supposons par l'absurde que $j$ soit non nul.

Alors, puisque les 20 nombres $n_1, n_2, n_3, ..., n_{20}$ sont de Harshad, on y trouve la suite de nombres de Harshad $(a + 1)00$, $(a + 1)01$, ..., $(a + 1)10$.

Or, d'après le lemme3, ceci est absurde.

Ainsi $j = 0$ et $n_1$ s'écrit $a90$.

*Théorème de Grundman* (3)

Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de plus de 20 nombres de Harshad consécutifs donc on extrait $n_1, n_2, n_3, ..., n_{20}, n_{21}$ une suite de 21 nombres de Harshad consécutifs.

D'après les recherches effectuées, il n'existe pas de suite de 21 nombres de Harshad dont le premier terme soit inférieur à 100. Donc $n_1 > 100$ et $a > 0$.

$n_1$ étant le premier terme d'une suite d'au moins 20 nombres de Harshad consécutifs, d'après le théorème précédent, $n_1$ s'écrit $a90$.

Mais de même, $n_2$ est aussi le premier terme d'une suite d'au moins 20 nombres de Harshad consécutifs et donc $n_2$ s'écrit $a90$. C'est absurde puisque $n_2 = n_1 + 1$.

**Donc il n'existe pas de suite de plus de 20 nombres de Harshad consécutifs.**

Nos enseignants nous ont indiqué qu'Helen Grundman avait trouvé une telle liste (dont les nombres sont extrêmement grands).

20 est donc la longueur maximum d'une liste de nombres de Harshad consécutifs.

**Notes d'édition**

(1) Les notations sont confuses, x étant un nombre entier, les étapes de l'algorithme sont:

Etape 1 y← x -10 * E(x/10)
Etape 2 s← s +y
Etape 3 x← (x- y)/10

E(x/10) désigne la partie entière de x/10

(2) On rappelle qu'un nombre entier est premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui même.
Dans le texte qui suit :
Div(N) désigne l'ensemble des diviseurs de l'entier N, par exemple Div(6) = { 1, 2 , 3, 6}
S(N) désigne la somme des chiffres dans l'écriture décimale de N ; par exemple S(103)=1+0+3=4

(3) Il s'agit en fait de la démonstration de ce théorème, énoncé page précédente.