Les Nombres constructibles à la règle et au compas

année 2013-2014

LE MOAL Charlotte 5e - LAUNAY Gaël 5e - BABEY Félix 3e

Encadrés par Mme LE GUYADER et Mr GUERIN

Nantes, Collège Victor Hugo, jumelé avec le collège Paul Langevin de Couëron

Chercheur : Pierre VIDOTTO, de la faculté de Nantes

Tout d'abord, **nous tenons à remercier le CNRS pour son soutien financier** dans notre projet Math.en.Jeans.

Notre problème : On veut construire des nombres (ex: 1; 2; -1; -3; 0,5; 0,25;√5) uniquement avec une règle non graduée et un compas. On se demande si on peut ainsi construire tous les nombres. (1)

Résultats de nos recherches : Nous avons réussi au cours de l'année à trouver comment construire les nombres entiers, toutes les fractions existantes, les racines carrées (et une "turboconstruction" pour les construire), les cosinus, sinus et tangentes simples, ainsi que le nombre d'or Φ. Nous n'avons pas réussi à placer le nombre Π. (2)

Nos résultats sur les nombres entiers :

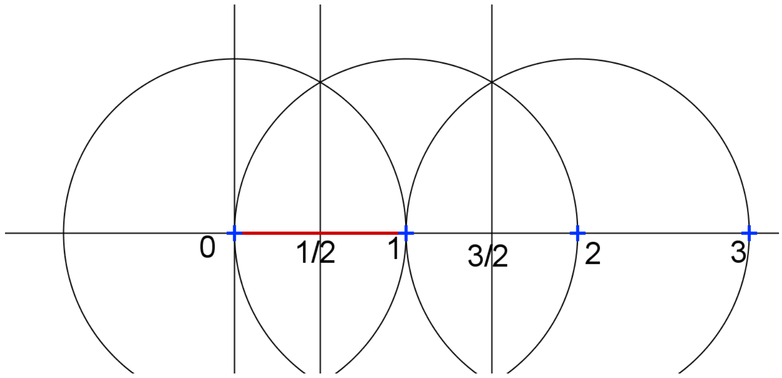
Pour tracer des nombres entiers, on prend l'écartement de compas entre le zéro et le un et on le reporte jusqu'à obtenir le nombre voulu.
On peut ainsi obtenir n'importe quel nombre entier relatif.

Nos résultats sur les fractions :

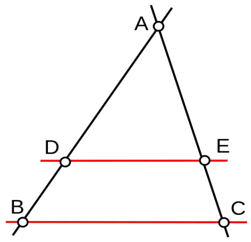
Pour construire la fraction $\frac{1}{2}$ (0,5), on se sert d'une propriété de la médiatrice: la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. On a vu en cours la construction d'une médiatrice. (3)

Pour construire la fraction $\frac{1}{4}$, on se sert également de la propriété de la médiatrice. Au lieu de mettre la pointe du compas sur le 0 et sur le 1, on la met sur le O et sur le 0,5.

Si on voulait obtenir $\frac{1}{8}$ (0,125), on effectuerait la même construction en plaçant la pointe du compas sur 0 et $\frac{1}{4}$ (0,25).

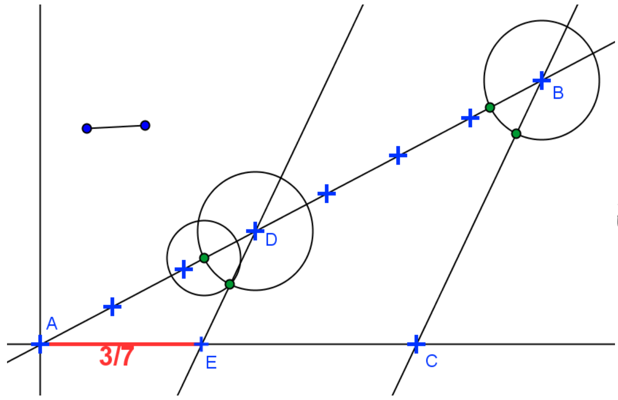


Pour tracer d'autres fractions dont le dénominateur n'est pas une puissance de 2, il faut se servir du théorème de Thalès. Voici ce qu'il nous dit:



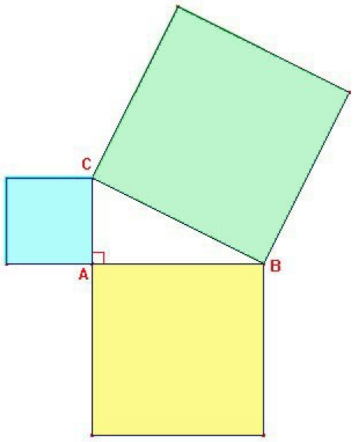
Si les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A et si les droites (DE) et (BC) sont parallèles, alors les côtés du petit triangle ADE sont proportionnels aux côtés du grand triangle ABC.
Donc AE/AC = AD/AB = DE/BC.

Voilà comment s'en servir pour tracer la fraction 3/7.
On commence par tracer 2 droites sécantes en prenant A(0) et C(1) sur (AC) puis, on gradue la droite (AB) en prenant un écartement de compas quelconque. Ensuite, on relie les points C et B. On trace ensuite la droite passant par D parallèle à (BC), elle coupe (AC) en E(3/7)



Et voilà: AE/AC = AD/AB = 3/7

Nos résultats sur les racines carrées :

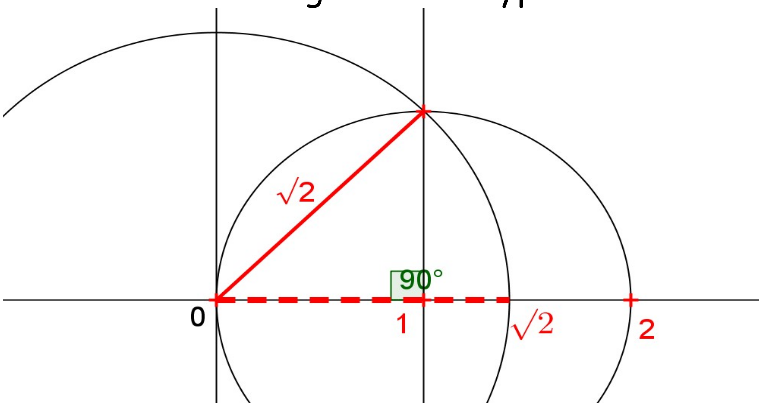


Pour tracer des racines carrées, il faut se servir du théorème de Pythagore. Le théorème dit que dans un triangle rectangle en A, AB^2 (l'aire du carré de côté [AB]) + AC^2(l'aire du carré de côté [AC]) est égal à BC^2 (l'aire du carré de côté [BC]).
Donc $\underline{BC^2 = AB^2+AC^2}$

Pour trouver √2, il faut que la somme des aires des carrés des côtés de l'angle droit soit égale à 2.

On remarque que 2 est égal à 1^2+1^2.

Donc il suffit de construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 1. La longueur de l'hypoténuse sera donc égale à √2.



Pour √10, il faut que l'aire des carrés des côtés opposés à l'hypoténuse soit égale à 10.

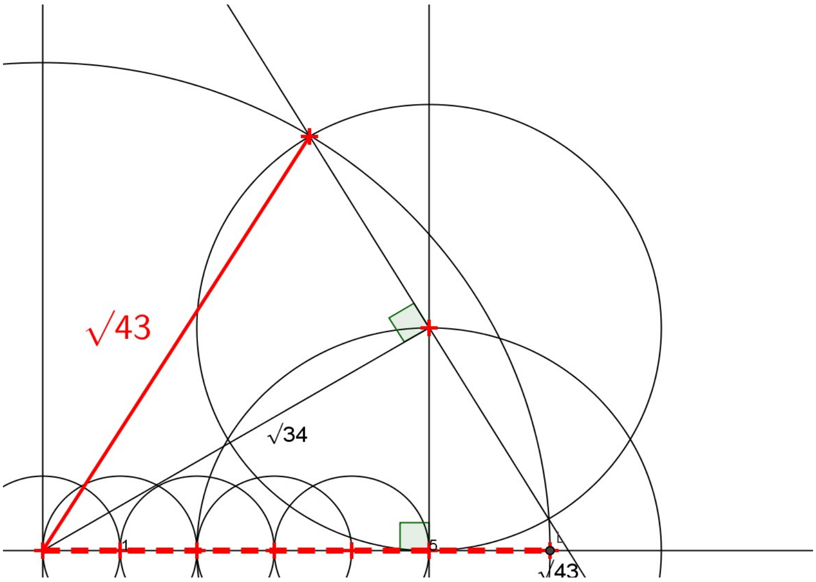
On remarque que 10 est égal à 9+1 soit $1^2 + 3^2$. Donc il suffit de construire un triangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 1. L'hypoténuse sera donc égale à √10.

La "turboconstruction"

On peut ainsi construire n'importe quelle racine carrée d'un nombre entier car tout nombre entier peut se décomposer en une somme de carrés de nombres entiers. (4)

Par exemple $\sqrt{43}$, 43 = 25 + 9 + 9 donc 43 = $5^2+3^2+3^2$

Donc :



Certains nombres comme φ (le nombre d'or), ou les cosinus, sinus et tangentes ne sont pas expliqués ici.

D'autres nombres comme π ne peuvent être construits à la règle et au compas. (5)

Notes d'édition

(1) Construire un nombre consiste à placer un point sur une feuille tel que la distance entre ce nouveau point et un point déjà présent correspond au nombre étudié. Pour la construction, on dispose d'une feuille contenant déjà deux points espacés de 1 cm, d'une règle non graduée et d'un compas.

(2) Les constructions de sinus, cosinus, tangentes et du nombre d'or ne sont pas présentées dans l'article.

(3) On peut construire une médiatrice sans équerre uniquement avec la règle et le compas en utilisant le fait que tous les points d'une médiatrice sont équidistants des extrémités du segments. On visualise la construction sur la première figure de la page 2.

(4) Il ne s'agit pas forcément d'une somme de deux carrés, il peut y en avoir plus. Cette décomposition n'est pas forcément unique et existe toujours car, par exemple, on peut additionner le nombre 1 (qui est un carré) jusqu'à obtenir le nombre souhaité. Si la somme comporte plus de 2 carrés, il faudra répéter plusieurs fois la construction précédente.

(5) Ce dernier résultat est loin d'être évident !