nombres congruents

par Merry-Laure Boukoko (2nde), Awa Cissoko (2nde), Nam Doan-Dinh (1°S), Karim Kaabeche (2nde), Myriam Medjidi (2nde), Samir Medjkane (TC), Erol Noksan (TC), Mathieu Sarthe-Moureou (1°ES), du lycée Georges Braque d'Argenteuil (95)

enseignante : Joëlle Richard

chercheur : Michèle Vergne

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe :

lycée J. Jaurès

— Cet exposé m'a permis de me rappeler l'exposé de M. Barsky qui a eu lieu l'année dernière au lycée Jean Jaurès [NDLC : on ne dirait pas … à moins que la Terre entière n'ait assisté à cet exposé.]

— De bonnes recherches, quelques résultats, cela m'a beaucoup intéressé. Cela traitait de trouver les différentes manières de trouver des nombres congruents. [NDLC : cette NDLC est donc un discours sur un discours sur un discours sur les mathématiques !]

lycée A. Kastler

Très difficile à comprendre. Je ne suis qu'en 2de !!

quels sont les nombres congruents ?

Existe-t-il des nombres entiers S qui sont des aires d'un triangle rectangle dont les côtés seraient mesurés par des nombres rationnels ? On sait qu'un nombre rationnel est un entier ou un quotient de deux entiers. Autrement dit, S étant un entier, a, b, c étant rationnels, on aurait simultanément :

$$S = \frac{1}{2}\,a\,b \text{ et } a^2 + b^2 = c^2$$

Evidemment, il en existe !

• si $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, on a $3^2 + 4^2 = 5^2$ et l'aire S du triangle correspondant est :

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

• si $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{20}{3}$, $c = \frac{41}{6}$, on a bien

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \left(\frac{41}{6}\right)^2$$

et l'aire S du triangle correspondant est :

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{20}{3} = 5$$

De tels nombres, dont 5 et 6 sont des exemples, sont appelés *nombres congruents*. Y en a-t-il d'autres ? Sont-ils nombreux ? Comment les trouver ? Peut-on savoir si un nombre donné est congruent ?

les triplets pythagoriciens

Dans notre quête des nombres congruents, nous avons été confrontés à l'utilisation de ces fameux nombres a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Si a, b, c sont entiers, on les appelle *triplets pythagoriciens* (ou TP). Peut-on trouver facilement ces triplets ?

On peut tout d'abord remarquer que si l'on connait un TP (a, b, c) on en obtient une infinité en multipliant chacun des entiers a, b, c par un entier k. En effet, si $a^2 + b^2 = c^2$, alors $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$.

exemple

A partir du triplet (3, 4, 5), on obtient,
en prenant $k = 2$: (6, 8, 10),
en prenant $k = 3$: (9, 12, 15)

tous les TP !

Diophante (III° s. av. J.C.) nous a laissé heureusement une méthode qui permet d'obtenir ***tous*** les triplets primitifs pythagoriciens, c'est-à-dire les triplets (a, b, c) dans lesquels a, b, c n'ont pas de diviseur commun. Voici cette méthode :

On choisit deux entiers m et n de parité différente et sans diviseurs communs, et tels que $m > n$. a, b, c sont obtenus par les égalités :

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2\,m\,n$$
$$c = m^2 + n^2$$

On a bien :

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2$$
$$= (m^2 + n^2)^2$$

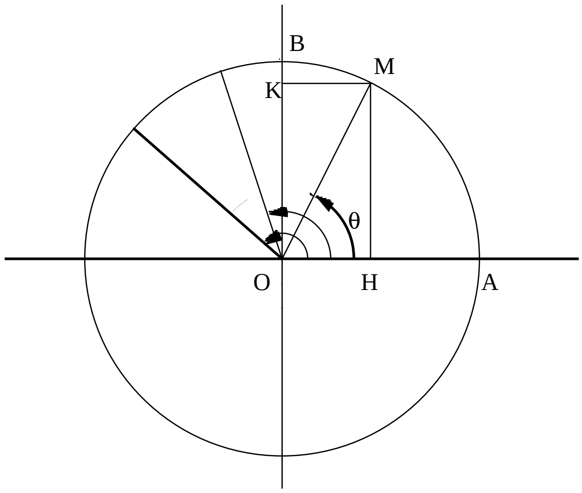
En donnant à m et n toutes les valeurs possibles, on engendre ***tous*** les triplets primitifs pythagoriciens.

m	n	$b = 2mn$	$a = m^2-n^2$	$c = m^2 + n^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	3	24	7	25
5	2	20	21	27
5	4	40	9	41
6	5	60	11	61
7	6	84	13	85
8	7	112	15	113
8	5	80	39	89
8	3	48	55	73
4	1	8	15	17
6	3	36	27	45
…	…	…	…	…

[*extrait du tableau qu'on peut alors former*]

Voici maintenant une parenthèse originale concernant les TP ; c'est un calcul qui nous a été suggéré au cours de la recherche par Jean Brette du Palais de la découverte ; il fait appel à la trigonométrie.

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté, de centre O et de rayon 1.



Si M est un point de ce cercle, repéré par l'angle θ, on a :

$$\overline{OH} = \cos\theta$$
$$\overline{OK} = \sin\theta$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Reprenons le triplet célèbre (3, 4, 5) :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

en divisant par 5^2 :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

3/5 et 4/5 peuvent être considérés comme le cosinus et le sinus d'un même angle θ :

$$\overline{OH} = \frac{3}{5} \; ; \overline{OK} = \frac{4}{5}$$
$$\overline{OH}^2 + \overline{HM}^2 = \overline{OM}^2 = 1$$

Multiplions θ par 2 :

On sait que :

$$\begin{cases} \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$ formules connues de trigonométrie

On obtient ici :

$$\cos 2\theta = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$$
$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

d'où :

$$\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1$$

ce qui entraîne $7^2 + 24^2 = 25^2$. Voilà donc un nouveau triplet pythagoricien : (7, 24, 25).

Si maintenant on multiplie θ par 3 :

On sait que :

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases}$$ formules connues de trigonométrie

On obtient ici :

$$\cos 3\theta = \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 3 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{117}{125}$$
$$\sin 3\theta = 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{44}{125}$$

ce qui donne naissance au triplet pythagoricien : (117, 44, 125).

On a donc successivement les triplets

(3, 4, 5)
(7, 24, 25)
(117, 44, 125)

On remarque que chacun des entiers *c* est une puissance de 5. Si on continue l'opération, on aura la succession des résultats suivants :

à θ correspond le triplet (3, 4, 5) $c = 5$
à 2θ correspond (7, 24, 25) $c = 5^2$
à 3θ correspond (117, 44, 125) $c = 5^3$
…
et vraisemblablement
à $n\theta$ correspondra $c = 5^n$

Par cette méthode trigonométrique, à partir du triplet (3, 4, 5) on a obtenu les TP dont le troisième terme est une puissance de 5. C'était une des *curiosités* rencontrées dans notre recherche et que nous voulions faire partager.

Mais revenons à ce qui nous occupe.

Ouvrez vos yeux et appréciez une méthode pour obtenir des nombres congruents. Voici d'abord un exemple :

Si $a = 9$, $b = 40$, $c = 41$:

$$S = \frac{1}{2}\,a\,b = \frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180 = 5 \times 6^2$$

D'autre part :

$$9^2 + 40^2 = 41^2$$

Divisons par 6^2 :

$$\left(\frac{9}{6}\right)^2 + \left(\frac{40}{6}\right)^2 = \left(\frac{41}{6}\right)^2$$

On obtient donc un triangle rectangle à côtés rationnels :

$$\frac{9}{6},\ \frac{40}{6},\ \frac{41}{6}$$

Calculons son aire *S'* :

$$S' = \frac{1}{2} \times \frac{9}{6} \times \frac{40}{6} = 5$$

S' est un nombre entier : il est ***congruent***.

D'une manière générale, si $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b, c entiers) et si l'aire S de ce triangle rectangle de côtés a, b, c peut s'écrire sous la forme

$$S = k^2 \times R \qquad (R \text{ et } k \text{ entiers})$$

alors on peut diviser par k^2 l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$; on obtient :

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\right)^2 = \left(\frac{c}{k}\right)^2$$

Ce nouveau triangle à côtés rationnels

$$\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$$

a pour aire :

$$S' = \frac{1}{2} \times \frac{a}{k} \times \frac{c}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{k^2}$$

$$= \frac{S}{k^2} = \frac{k^2 R}{k^2} = R$$

R est un entier. $S' = R$ est donc aussi un nombre congruent. Or, grâce à la méthode de Diophante, nous pouvions avoir tous les triplets pythagoriciens :

$$a = k\,(m^2 - n^2)$$
$$b = k\,(2\,m\,n)$$
$$c = k\,(m^2 + n^2)$$

m et n étant, rappelons-le, des entiers de parités différentes, sans diviseurs communs, avec $m > n$, et k étant un entier quelconque. L'aire S du triangle rectangle correspondant est :

$$S = \frac{1}{2}\,a\,b = \frac{1}{2} \times k^2 \times (2mn)(m^2 - n^2)$$

$S = k^2\,m\,n\,(m^2 - n^2)$. S est congruent.

Mais aussi $R = m\,n\,(m^2 - n^2)$ est aussi congruent. Et si on débarasse R des ses diviseurs carrés, on obtient un nouveau nombre congruent. En faisant varier m et n, nous obtenons ainsi une infinité de nombres congruents.

On a donc, grâce à ces formules, une bonne quantité de nombres congruents ; mais la chasse à ces nombres est loin d'être terminée. Des mathématiciens travaillent encore sur ce problème. Une des pistes de recherche a été l'utilisation de courbes dites *elliptiques*.

Nous avons vu que si R est un nombre congruent, alors il existe m, n, k' tels que :

$$m\,n\,(m^2 - n^2) = k'^2\,R \qquad (1)$$

On peut poser :

$$X = -\frac{R\,n}{m} \text{ et } Y = k'\,\frac{R^2}{m^2}$$

D'où :

$$k' = \frac{Y\,m^2}{R^2}$$

valeur que l'on reporte dans (1) :

$$m\,n\,(m^2 - n^2) = \frac{Y^2\,m^4}{R^4} \times R$$

et

$$m = -\frac{R\,n}{X}$$

D'où :

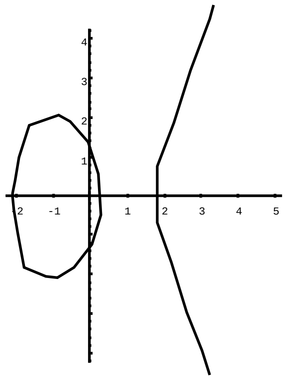
$$-\frac{R\,n^2}{X}\left(\frac{R^2\,n^2}{X^2} - n^2\right) = \frac{Y^2}{R^3} \times \frac{R^4\,n^4}{X^4}$$

soit, en simplifiant par $n^4\,R$:

$$-\frac{R^2}{X^3} + \frac{1}{X} = \frac{Y^2}{X^4}$$

D'où : $Y^2 = X^3 - R^2\,X$

On peut tracer les courbes représentatives de ces fonctions :



On sait que si R est congruent, il y a sur cette courbe des points P de coordonnées rationnelles X et Y.

Bien sûr, cette étude nous dépasse. Nous savons que des critères existent pour reconnaître un nombre congruent, mais c’est un problème très difficile, et, croyons-nous, pas encore complètement résolu.