LES NOMBRES MAGIQUES

[Année 2013 - 2014]

Noms et Prénoms des élèves, niveaux :
Clémentine Sarica – 5ème
Guilhem Viader – 5ème
Timothé Suchorzewski – 5ème
Nathan Albarede – 5ème
Adrien Jallabert – 3ème
Sankiam Bourgeois – 3ème
Alexandre Gendreau – 3ème
Anthony Andolfo – 3ème

Établissements :
Collège Irène Joliot-Curie à Fontenilles (31)
Établissements jumelés
- Collège de Cantelauze à Fonsorbes (31)
- Collège Victor Hugo à Colomiers (31)

Enseignantes :
Mme Larue
Mme Bourdet
Mme Duc

Chercheurs :
Clément Rau (UPS Toulouse 31)
Clément Pelligrini (UPS Toulouse 31)

[Présentation du sujet]

LA PYRAMIDE

$$1+2 = 3$$
$$4+5+6 = 7+8$$
$$9+10+11+12 = 13+14+15$$
$$16+17+18+19+20 = 21+22+23+24$$

Le premier membre de l'égalité contient 1 terme de plus que le second membre de l'égalité. Les nombres sont dans l'ordre croissant et à chaque ligne suivante, on ajoute un terme de plus à chaque membre.

Est-ce que ces égalités sont toujours vraies ?

[Annonce des résultats obtenus]

Nous avons trouvé que les égalités étaient toutes vraies.

[Présentation de la démarche]

Notre première observation :

$$\underline{1}+2 = 3$$
$$\underline{4}+5+6 = 7+8$$
$$\underline{9}+10+11+12 = 13+14+15$$
$$\underline{16}+17+18+19+20 = 21+22+23+24$$

Le premier terme du premier membre de chaque égalité est le carré du numéro de la ligne. Exemple: A la 4ème ligne, le premier nombre est 16, qui est le carré de 4.

Est-ce que le 1er terme est toujours un carré ?
Prenons la 2ème ligne. Le premier nombre correspond à 2^2 (voir première observation). Celle-ci contient 5 termes : 4 + 5 + 6 = 7 + 8.
Cinq termes équivaut à 2x2+1 (2 fois le numéro de la ligne plus 1).

Maintenant, prenons la 3ème ligne. Celle ci contient 7 termes :
9+10+11+12 = 13+14+15
7 termes équivaut à 2x3+1 (2 fois le numéro de la ligne plus 1).

On prend 2^2, soit le premier nombre de la deuxième ligne, on y ajoute le nombre de termes et on en vient au premier nombre de la ligne suivante, soit 3^2.

$2^2+2\times2+1 = 3^2$

Ce résultat nous présente l'écart entre le premier terme de la 2ème ligne et le premier terme de la 3ème ligne.

En généralisant, l'écart entre le premier terme de la $x$ème ligne et le premier terme de la $x+1$ème ligne est $2x+1$, on obtient la formule

$$x^2+ 2 \times x + 1 = (x + 1)^2 \quad [1]$$

Retour au problème :
Observons les premiers et derniers termes de chaque égalité.

On prend la 4ème ligne : 16+17+18+19+20 = 21+22+23+24
16, le premier nombre du premier membre, correspond à 4^2.
20, le dernier nombre du premier membre, correspond à 4^2+4.
21, le premier nombre du second membre, correspond à 4^2+4+1.
24, le dernier nombre du second membre, correspond à au carré de la ligne suivante moins 1.
Ici, la ligne suivante est la 5ème, donc $5^2=25$ 25-1= 24.

En utilisant un maximum de 4 pour écrire l'égalité, on obtient:
$4^2+(4^2+1)+(4^2+2)+(4^2+3)+(4^2+4) = (4^2+5)+(4^2+6)+(4^2+7)+(4^2+8)$
$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$

Explication :
Maintenons, expliquons l'égalité, et vérifions si elle est vraie.
Gardons pour exemple la 4ème ligne.
On a donc : $16+17+18+19+20 = 21+22+23+24$
Comme $16 = 4+4+4+4$
on a $16+17+18+19+20 = 4+4+4+4+17+18+19+20$
$= 17+4 + 18+4 + 19+4 + 20+4$
$= 21 + 22 + 23 +24$
On a donc décomposé le premier nombre (16), en plusieurs 4 (4+4+4+4) que l'on a redistribué à chaque terme pour obtenir le second membre.

Extension au cas général :

On sait que l'égalité est vraie pour 4, mais l'est-elle si on continue la pyramide infiniment ? Pour répondre à cette question, nous allons généraliser, c'est à dire qu'on va tester l'égalité avec n , qui désigne n'importe quel nombre.

On avait :
$4^2+(4^2+1)+(4^2+2)+(4^2+3)+(4^2+4) = (4^2+5)+(4^2+6)+(4^2+7)+(4^2+8)$
$4^2+(4^2+1)+(4^2+2)+(4^2+3)+(4^2+4) = (4^2+4+1)+(4^2+4+2)+(4^2+4+3)+(4^2+4+4)$

En remplaçant 4 par n :
$n^2+(n^2+1) +...+(n^2+n) = (n^2+n+1)+...+(n^2+n+n)$
Or $n^2= n+n+n+n+....n$ n fois n (pour 4, $4x4 = 4+4+4+4$)

De la même formule utilisée pour tester 4, nous allons tester n.
$n^2 + (n^2+1) + (n^2+2) + \dots + (n^2+n) = (n^2+n+1) + ... + (n^2+2n)$

On a donc décomposé le premier nombre, en n (n+n+n+n+....n) que l'on a redistribué à chaque terme pour obtenir le second membre.
En ajoutant n à chaque terme du premier membre :
$n^2 + (n^2+1) + (n^2+2) + \dots + (n^2+n) = (n^2+1 +n) + (n^2+2 +n) +...+(n^2+n+n)$
On retrouve le deuxième membre !

[Conclusion]

Après avoir testé l'égalité avec des valeurs, on a pu démontrer avec le calcul littéral que ces égalités sont toujours vraies.

Notes d'éditions
[1] Il est démontré ici que, si le premier terme de la liste x est x^2, alors le premier terme de la ligne x+1 est $(x+1)^2$. On en déduit que de façon générale le premier terme de la n-ième ligne est n^2. C'est ce qu'on appelle un raisonnement par récurrence.