

les nombres de Fibonacci

par Fouad Abedli, Mickaël Paka, Nadir Marouf, élèves de 1^oS1 (modules) du lycée Louise Michel de Bobigny (93)

enseignant : M. François Gaudel

chercheur : M. Daniel Barsky

[NDLR : ce début d'article, seul travail rédigé par les élèves, constitue une bonne mise dans l'ambiance pour l'article suivant ; c'est à ce titre qu'il figure ici.]

Fibonacci était le surnom de Léonard de Pise (1170-1250). Il a posé un problème dans lequel il cherche à calculer le nombre de couples de lapins au bout de n années, lorsqu'ils se reproduisent selon les règles suivantes :

1. Les lapins se reproduisent par couple.

[NDLC : ce n'est pas spécifique aux lapins ...]

2. Un couple de lapins donne naissance à un nouveau couple tous les ans, à partir de la 2^{ème} année (la 1^{ère} année, il est trop jeune).

[NDLC : il semblerait plus exact de parler de *mois* plutôt que d'*années*.]

3. Les lapins sont immortels ...

[NDLC : ça, c'est déjà plus rare !]

explosion démographique

Numéro de l'année	Nombre de couples	se décomposant en ...
0	0	0
1	1	1
2	1	<u>1</u>
3	2	<u>1</u> +1
4	3	<u>2</u> +1
5	5	<u>3</u> +2
6	8	<u>5</u> +3
7	13	<u>8</u> +5

On a souligné les « vieux » couples de lapins, susceptibles de se reproduire. Ils sont en nombre égal au nombre total de couples de l'année précédente.

On a, si on appelle F_n le nombre de couples de lapins de l'année n ,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Nous allons montrer que *deux termes successifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux*.

Définition : Deux nombres sont premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun est 1.

Alors leur PGCD est 1 et donc les diviseurs sont 1 et -1.

Montrons par récurrence que F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux à partir de $n = 1$.

- La propriété est vraie pour $n = 1$: F_2 et F_1 sont premiers entre eux.
- Supposons que F_n et F_{n-1} soient premiers entre eux :

Soit d le PGCD de F_n et F_{n+1} , alors d divise $F_{n+1} - F_n$. Donc d divise F_{n-1} car :

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

donc $d = 1$. Donc F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux.

Nous avons montré par récurrence que F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux à partir de $n = 1$.

Remarque : Ce n'est pas le cas pour des termes quelconques. Certains sont multiples les uns des autres. Exemples :

$$8 \text{ et } 2 \quad (F_6 = 8 \text{ et } F_3 = 2)$$

$$55 \text{ et } 5 \quad (F_{10} = 55 \text{ et } F_5 = 5)$$

Les nombres de Fibonacci apparaissent aussi dans la croissance des plantes. Le nombre de pétales des différentes fleurs est souvent un nombre de la suite de Fibonacci. On remarque que l'angle entre deux *primordia* successifs, tend vers L'ANGLE D'OR, et que plus les nombres successifs sont grands, plus le rapport s'approche du NOMBRE D'OR.