Nombranagramme

Année 2018– 2019

Groupe : Quentin FARRE, Enrique GALVEZ, Gaetan KERVAREC, Julien SORIANO
Rédacteur : Enrique GALVEZ
Encadrés par BERTHE Pascal , MOCCAND Eric, VERGNAC Martine.
Établissements : Lycée Jean Lurçat , Perpignan

Chercheur : BROUZET Robert , LAMPS, UPVD, Perpignan.

1. Présentation du sujet

Soit n un nombre entier naturel à k chiffres.
n est nombranagramme si et seulement si son produit avec les nombres de 1 à k est un anagramme de lui-même (c'est-à-dire une permutation de lui-même) .

Exemple :
On prend un nombre au hasard : 142 ce nombre a **3** chiffres
142 x1 = 142
142 x2 = 284 -> 284 n'est pas une permutation de 142
142 x3 = 426 -> 426 n'est pas une permutation de 142 (1)
Donc 142 n'est pas nombranagramme

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

On conjecture assez rapidement qu'il existe peu de nombranagrammes. On remarque de plus que les dix chiffres sont des nombranagrammes.
A partir de la preuve que l'ensemble des nombranagrammes est majoré, on peut effectuer la disjonction des cas par informatique en écrivant un programme en langage python. (2)
On montre ainsi que 142 857 est le seul nombranagramme à plus d'un chiffre.

3. Démarche suivie et démonstrations

a. Remarques préliminaires

Après avoir choisi ce sujet, la première étape a tout d'abord été de le comprendre.
De cette phase de compréhension sont ressorties quelques remarques plus ou moins évidentes sur le sujet, parmi lesquelles entre autres:

Remarque 1: TOUS les chiffres sont des nombranagrammes : En effet, $1 \times n = n$.

Remarque 2: Deux nombres ne peuvent être anagrammes l'un de l'autre s'ils n'ont pas le même nombre de chiffres.

Remarque 3 : Pour qu'un nombre soit nombranagramme, il faut que son produit avec TOUS les nombres de 1 à k soit une permutation. Donc, il suffit que l'un ce ces produits ne soit pas une permutation de n pour que n ne soit pas nombranagramme.
Un nombre n à k chiffres dont son produit $n \times k$ n'est pas une permutation de n n'est pas nombranagramme.

Remarque 4 : Des remarques 2 et 3 découle que si $k \geq 10$ alors n ne peut pas être nombranagramme, cette remarque permet de prouver qu'il n'existe pas de nombranagrammes supérieurs à 10^9.

b. Premier axe de recherche : manière algébrique

A partir de ces remarques, nous avons tout d'abord tenté de trouver des nombranagrammes de manière totalement algébrique.
Pour ce faire, il a tout d'abord fallu traduire le problème algébriquement, c'est-à-dire l'exprimer à l'aide d'équations et de divers outils, afin d'arriver à une expression plus théorique et plus facile à résoudre.
Ainsi, nous avons réussi à démontrer qu'il n'existe pas de nombranagrammes à deux chiffres:

$n \in \mathbb{N}$, x_1 et x_0 sont les chiffres de n: $n = 10x_1 + x_0$.

n nombranagramme $\Leftrightarrow \begin{cases} n \times 1 = 10x_1 + x_0 \quad ou \quad n \times 1 = 10x_0 + x_1 \quad (*) \\ n \times 2 = 10x_1 + x_0 \quad ou \quad n \times 2 = 10x_0 + x_1 \end{cases}$

Or, $(*)$ est toujours vrai, donc

n nombranagramme $\Leftrightarrow n \times 2 = 10x_1 + x_0 \quad ou \quad n \times 2 = 10x_0 + x_1$

$\Leftrightarrow 2n = n$ (impossible) $ou \quad 2(10x_1 + x_0) = 10x_0 + x_1$

$\Leftrightarrow 20x_1 + 2x_0 = 10x_0 + x_1$

$\Leftrightarrow 19x_1 = 8x_0$

Or, $\text{PGCD}(19{,}8) = 1$, donc, d'après le Théorème de Gauss, cette équation n'a pas the solutions entières, donc il n'existe pas de chiffres x_0 et x_1 tels que n soit nombranagramme. Donc il n'existe pas te nombranagramme à deux chiffres. (3)
Cependant, nous nous sommes heurtés au problème de l'important nombre de permutations des chiffres possible au sein d'un même nombre.

Ce nombre d'équations à résoudre peut s'estimer à l'aide de l'expression mathématique : (4)

$$\sum_{k=2}^{9} k! \times k(10^k - 10^{k-1})$$

On trouve donc environ 3×10^{15} équations soit trois fois le nombre de bactéries dans un corps humain.

c. Second axe de recherche : manière informatique

En raison du grand nombre d'équations à résoudre, nous avons été contraints d'utiliser un outil permettant de faire ce travail à notre place : l'informatique. (5)

A l'aide du langage de programmation python, nous avons donc conçu un algorithme permettant de vérifier pour TOUS les nombres s'ils sont ou non nombranagrammes.

En fait, s'il est possible de déterminer à l'aide d'un programme tous les nombranagrammes qui existent, c'est grâce à la remarque 4 qui indique que l'ensemble des nombranagrammes est majoré par 10^9. (6)

De plus, on pourra remarquer une optimisation possible du programme :

Si $n \geq \frac{10^k}{k}$ alors $nk \geq 10^k$

Or 10^k a $k+1$ chiffres

donc nk a au moins k+1 chiffres et n ne peut pas être nombranagramme

Il suffit donc de tester chaque nombre entre 0 et 10^9, tels que 10 puissance leur nombre de chiffre sur leur nombre de chiffre soit strictement supérieur à lui-même.

Le programme ainsi écrit donne donc :

(pseudo-code à gauche, python à droite)

```
n = -1

Tant que n < 10^9:
        on ajoute 1 à n
        k prend la valeur: nombre de chiffres de n

        Si n >= 10^k/k:
                n prend la valeur: 10^k

        Pour i allant de 1 à k:
                si nxi et n ne sont pas anagrammes:
                        stopper la boucle

        Si i = k:
                afficher n est nombranagramme
```

```python
n = -1  # initialisation de n à -1

while n < 10**9:  # tant que n < 10^9
    n += 1

    l = list(str(n))
    k = len(l)

    if n >= 10**k/k:
        n = 10**k

    i = 1
    while i <= k:
        i += 1
        p = list(str(n * i))
        if sorted(l) != sorted(p):
            break

    if i == k+1:
        print(n, " est un nombranagramme")
```

4. Conclusion

Après avoir fait tourner le programme (environ 3 minutes sur un ordinateur voué à la bureautique), nous constatons que le programme renvoie :

- Les 10 chiffres (conformément à la remarque 1)
- Le nombre 142857, qui est l'UNIQUE nombre à plus de un chiffre renvoyé.

En partant de ce résultat, nous nous sommes intéressés aux propriétés du nombre 142857, qui s'est révélé être un nombre très particulier.

Parmi ses propriétés, on remarque que 142857 est un nombre phénix, c'est-à-dire que chacun des produits avec les nombres de 1 à k (avec k son nombre de chiffres) donne une permutation CIRCULAIRE de lui-même.

De plus, on peut sommer les chiffres de 142857 pour obtenir 9, 99 et 999 (7)

Et enfin, on peut démontrer que 142857 est la période de la fraction $\frac{1}{7}$ (8).

NOTES DE L'ÉDITION

(1) Cette ligne est inutile: on a trouvé un produit $n \times k$ qui n'est pas un anagramme de n et cela suffit pour dire que n n'est pas un nombranagramme.

(2) Plutôt que d'une "disjonction des cas par informatique", il s'agira d'utiliser l'outil informatique pour examiner un grand nombre de cas (voir la note 5).

(3) L'équation $19x_1 = 8x_0$ a des solutions entières, par exemple la solution évidente $x_0 = 19$ et $x_1 = 8$. Mais le théorème de Gauss nous dit qu'alors x_0 doit être un multiple de 19, et x_1 un multiple de 8. Ici il faut de plus que x_0 et x_1 soient des chiffres entre 0 et 9, donc il n'y a bien aucune solution.

(4) Pour chacun des entiers k entre 1 et 9, on a $(10^k - 10^{k-1})$ nombres de k chiffres, et pour chacun de ces nombres $k!$ permutations à tester pour les k produits, d'où le total indiqué. Mais on pourrait réduire un peu ce nombre, par exemple ne pas tester les produits $1 \times n$ donc se limiter à $k-1$ produits à vérifier pour un nombre de k chiffres.

(5) Il n'y a pas vraiment ici d'"axe de recherche" informatique: à part la possibilité matérielle de vérifier tous les cas avec un ordinateur, les seules différences de méthode semblent être la limitation à $n < 10^k/k$, et le test dans le programme où pour vérifier si un nombre de k chiffres est une permutation d'un autre on réordonne les chiffres en croissant au lieu d'avoir à vérifier une équation pour chacune des $k!$ permutations.

(6) On peut distinguer trois points importants : a) l'algorithme peut vérifier tout nombre entier naturel et décider s'il est un nombranagramme ou non; b) on sait par l'algèbre qu'un nombranagramme ne peut avoir plus de 9 chiffres et donc l'algorithme peut théoriquement les déterminer tous; c) Le fait que les ordinateurs actuels peuvent traiter 10^{10} opérations en un temps raisonnable nous permet de les déterminer explicitement.

(7) Les auteurs ne disent pas clairement comment les chiffres sont ajoutés. Il faut vraisemblablement comprendre $1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9$, $14 + 28 + 57 = 99$ et $142 + 857 = 999$. Est-ce lié au fait que 142857 est un nombre phénix ?

(8) C'est-à-dire $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857 \ldots$ Et les permutations circulaires de 142857 sont les "périodes" des fractions $\frac{k}{7}$ pour les entiers k de 1 à 6. Cela provient du fait qu'en posant la division de 1 par 7 on obtient tous les restes possibles (successivement $3, 2, 6, 4, 5, 1$) et que la suite de l'opération à partir d'un reste k revient exactement à diviser k par 7 : la suite des décimales de $\frac{k}{7}$ est simplement celle de $\frac{1}{7}$ prise à partir d'un certain rang.