Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Noix de coco dans la tour Montparnasse

Année 2017 - 2018

Élève de 3ème : Océane Du Laurent De La Barre, Titouan Godard-Durand, Anouk Missenard, Maxime Saleur.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence Ferry et Claudie Asselain.
Chercheur : Raphaël Tinarrage.

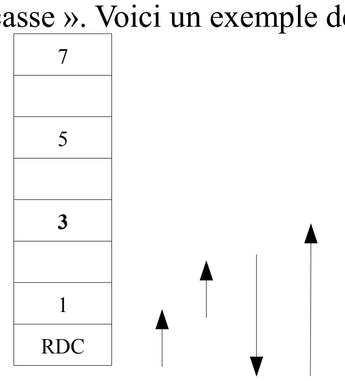
Le sujet : Nous sommes au pied d'une tour qui a des fenêtres à chaque étage, et nous avons deux noix de coco. Nous devons déterminer à partir de quel étage une noix va se casser si on la jette dans le vide, sachant que nos noix se cassent toutes au même étage. Un ascenseur est à notre disposition. Quelles méthodes utiliser pour trouver le premier étage où la noix de coco se casse en faisant le moins de trajets possible ?

Résultats : Les stratégies que nous avons étudiées sont toutes du même type. Elles consistent à choisir un nombre n et tenter les lancers successivement depuis l'étage n, $2n$, $3n$.… (méthode dite de n en n). Nous avons regardé le coût de ces méthodes, avec un évaluateur qui est le nombre total de trajets qu'on aura à effectuer, en fonction de l'étage où la noix de coco cassait. Puis nous avons comparé ces stratégies entre elles en faisant varier la valeur du paramètre n. Nous avons traduit nos comparaisons par un tableau puis nous les avons représentées graphiquement et nous avons observé un certain nombre de résultats partiels, permettant de déterminer, pour un étage de casse donné, quelle valeur du paramètre n était la plus économique.

Dans la suite de l'article, une montée ou une descente en ascenseur, quelle que soit la distance parcourue, compte pour un trajet.

I – Premières recherches – différentes méthodes

La méthode de 1 en 1 : cette méthode consiste à monter d'un étage à l'étage immédiatement supérieur et à lancer la noix de coco à chaque étage jusqu'à trouver celui où elle se casse ; on l'appellera alors « l'étage de casse ». Voici un exemple de tour à 7 étages avec 3 comme étage de casse :

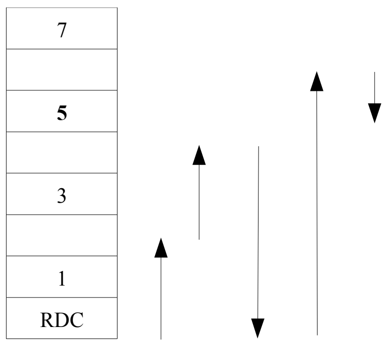
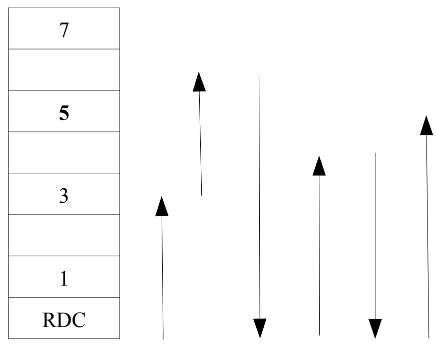


Description des trajets :

- on monte au 1, on lance la noix 1 qui ne se casse pas.
- on monte au 2, on lance la noix 2 qui ne se casse pas.
- on descend chercher les 2 noix de coco.
- on monte au 3, on lance la noix 1 qui se casse.

L'étage de casse est trouvé, c'est le 3, et nous avons effectué quatre trajets pour le trouver.
Cette méthode paraît peu rentable si le nombre d'étages est grand.

Nous avons de même fait des essais avec des méthodes de 2 en 2, de 3 en 3, etc.
Ces méthodes consistent à monter dans un premier temps les étages 2 par 2, ou 3 par 3, etc, pour aller plus vite puis quand une des noix se casse, reprendre la montée de 1 en 1 avec la dernière.
Voici deux exemples qui illustrent ces méthodes :

Tour à 7 étages (ou plus) avec 5 comme étage de casse – méthode de 2 en 2	Tour à 7 étages (ou plus) avec 5 comme étage de casse – méthode de 3 en 3
	
Pour trouver l'étage 5 de casse, on a effectué 5 trajets.	Pour trouver l'étage 5 de casse, on a effectué 6 trajets.

On peut s'apercevoir que la méthode de 2 en 2, ici, est plus avantageuse que celle de 3 en 3. Avec la méthode de 1 en 1, il nous faudrait 7 trajets, ce qui est encore moins bien. Mais si l'étage de casse avait été par exemple 3, la méthode de 3 en 3 aurait été la meilleure. Il s'agira donc par la suite de déterminer la meilleure des méthodes mais en connaissant l'étage de casse. (1)

II – Quelques résultats

Nous avons recherché un lien entre le nombre de trajets à effectuer et l'étage de casse en fonction de la méthode utilisée.
Dans cette partie, nous appellerons « trajets tests » les trajets qui vont d'un étage à un autre (on descend ou on monte) et « trajets récupération », les trajets que l'on fait pour aller chercher la ou les noix de coco intactes au rez de chaussée.

1) Méthode de 2 en 2

Avec la méthode de 2 en 2, on descend chercher les noix de coco après avoir monté 4 étages. Tous les étages peuvent donc être notés : 4k ; 4k + 1 ; 4k + 2 et 4k + 3 où k est un nombre entier naturel.
On compte le nombre de trajets pour certains étages de casse.

Étage de casse	Trajets tests	Trajets de récupération	Total des trajets
4k = 4 (k=1)	3	1	4
4k = 8 (k=2)	5	2	7
4k = 12 (k=3)	7	3	10
4k = 16 (k=4)	9	4	13
4k	2k + 1	k	3k + 1

Démontrons la formule de la dernière ligne de ce tableau :

Le nombre de trajets tests augmente de 2 entre chaque étage multiple de 4 car on monte deux fois de deux étages. Une fois ces deux trajets effectués, nous redescendons chercher les deux noix de coco, donc on effectue un trajet récupération supplémentaire. Nous allons démontrer que le nombre de trajets total est 3k + 1 pour un étage de casse 4k.
Pour k = 1, le nombre total de trajets est de 3 x 1 + 1 = 4 ; notre formule est bien vérifiée pour k = 1.
Supposons qu'à un rang 4k, le nombre de trajets total est de 3k + 1 ; le rang d'après « 4(k + 1) », on va ajouter 3 trajets (les deux trajets tests et la récupération), ce qui va faire 3k + 4 ;
3k + 4 = 3k + 3 + 1 = 3(k + 1) + 1. La formule est donc bien vraie au rang « 4(k + 1) ». Elle sera donc vraie à n'importe quel rang 4k. (2)

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
4k + 1 = 1 (k=0)	2	0	2
4k + 1 = 5 (k=1)	4	1	5
4k + 1 = 9 (k=2)	6	2	8
4k + 1 = 13 (k=3)	8	3	11
4k + 1 = 17 (k=4)	10	4	14
4k + 1	2k + 2	k	3k + 2

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
4k + 2 = 2 (k=0)	2	0	2
4k + 2 = 6 (k=1)	4	1	5
4k + 2 = 10 (k=2)	6	2	8
4k + 2 = 14 (k=3)	8	3	11
4k + 2 = 18 (k=4)	10	4	14
4k + 2	2k + 2	k	3k + 2

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
4k + 3 = 3 (k = 0)	3	1	4
4k + 3 = 7 (k = 1)	5	2	7
4k + 3 = 11 (k = 2)	7	3	10
4k + 3 = 15 (k = 3)	9	4	13
4k + 3 = 19 (k = 4)	11	5	16
4k + 3	2k + 3	k + 1	3k + 4

Pour ces trois derniers tableaux, on démontre la formule de généralisation du nombre total de trajets avec une explication identique qu'au premier tableau puisque d'une ligne à l'autre on ajoute toujours trois trajets.

2) Méthode de 3 en 3

Avec la méthode de de 3 en 3, on descendra chercher les noix de coco tous les 6 étages. Tous les étages peuvent alors se noter : 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 et 6k + 5, où k est un nombre entier naturel.
Comme pour la méthode de 2 en 2, nous avons compté séparément les trajets tests et de récupération effectués lors des tests. On aura toujours cet ajout de deux trajets tests et de un trajet de récupération pour le passage d'une ligne à l'autre ; les explications pour justifier les généralisations sont les mêmes que pour la méthode de 2 en 2.

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
6k = 6 (k=1)	4	2	6
6k = 12 (k=2)	6	3	9
6k = 18 (k=3)	8	4	12
6k = 24 (k=4)	10	5	15
6k	2k + 2	k + 1	3k + 3

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
6k + 1 = 1 (k=0)	2	0	2
6k + 1 = 7 (k=1)	4	1	5
6k + 1 = 13 (k=2)	6	2	8
6k + 1 = 19 (k=3)	8	3	11
6k + 1 = 25 (k=4)	10	4	14
6k + 1	2k + 2	k	3k + 2

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
6k + 2 = 2 (k=0)	3	1	4
6k + 2 = 8 (k=1)	5	2	7
6k + 2 = 14 (k=2)	7	3	10
6k + 2 = 20 (k=3)	9	4	13
6k + 2 = 26 (k=4)	11	5	16
6k + 2	2k + 3	k + 1	3k + 4

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
6k + 3 = 3 (k=0)	3	1	4
6k + 3 = 9 (k=1)	5	2	7
6k + 3 = 15 (k=2)	7	3	10
6k + 3 = 21 (k=3)	9	4	13
6k + 3 = 27 (k=4)	11	5	16
6k + 3	2k + 3	k + 1	3k + 4

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
6k + 4 = 4 (k=0)	3	1	4
6k + 4 = 10 (k=1)	5	2	7
6k + 4 = 16 (k=2)	7	3	10
6k + 4 = 22 (k=3)	9	4	13
6k + 4 = 28 (k=4)	11	5	16

6k + 4	2k + 3	k + 1	3k + 4

Étage de casse	Trajets tests	Trajets récupération	Total des trajets
6k + 5 = 5 (k=0)	4	2	6
6k + 5 = 11 (k=1)	6	3	9
6k + 5 = 17 (k=2)	8	4	12
6k + 5 = 23 (k=3)	10	5	15
6k + 5 = 29 (k=4)	12	6	18
6k + 5	2k + 4	k + 2	3k + 6

Nous avons effectué plusieurs tableaux similaires avec différentes méthodes en cherchant une formule générale permettant, en fonction d'une méthode de n en n, d'un nombre de noix de coco *x* (et plus uniquement 2), et toujours de k, de trouver le nombre de trajets parcourus, mais notre recherche, trop vaste, n'a pas abouti.

III – Des exemples

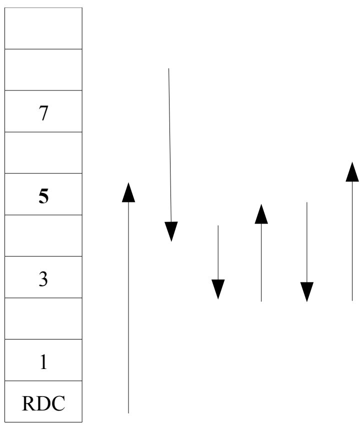
Pour obtenir de nombreux exemples rapidement, nous avons réalisé deux programmes avec le logiciel Scratch. (3)
Le programme 1 a servi à calculer le nombre de trajets pour un étage de casse donné avec une méthode de résolution précisée. Le programme 2 a servi à calculer le nombre de trajets pour un étage de casse donné et pour chaque méthode. Nous avons ajouté à ce dernier programme une valeur à entrer : le nombre de noix de coco au départ.
Voici donc un tableau recensant les résultats ; chaque nombre du tableau représente le nombre total de trajets pour une méthode et un étage de casse donnés.

Méthodes n en n → Etage de casse ↓	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	5	4	4	6	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
5	7	5	6	4	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10
6	8	5	6	6	4	10	12	12	12	12	12	12	12	12
7	10	7	5	8	6	4	12	14	14	14	14	14	14	14
8	11	7	7	8	8	6	4	14	16	16	16	16	16	16
9	13	8	7	5	10	8	6	4	16	18	18	18	18	18
10	14	8	7	7	10	10	8	6	4	18	20	20	20	20

Les cases grisées représentent la ou les meilleure(s) méthode(s) pour l'étage de casse considéré.

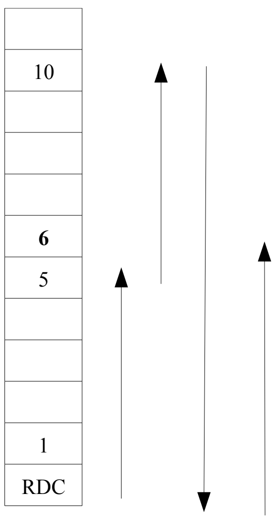
Nous remarquons que, sur une ligne, à partir d'une certaine colonne, le nombre ne varie plus ; sous le premier nombre qui va ensuite se répéter sur la ligne, on a encore ce même nombre. Les 4, les 6, les 8, les 10, etc, forment une sorte de « L » couché.

Nous allons expliquer quelques résultats trouvés grâce au tableau.
1 - Si la méthode est supérieure à l’étage de casse, le nombre total de trajets est égal au double de l’étage de casse.

Exemple : étage de casse 3 et méthode de 5 en 5 	Généralisation : L'étage de casse est c et la méthode est de n en n avec : n > c On monte en n, la noix se casse. On descend au 1 : - si la noix se casse au 1, on a effectué 2 trajets donc notre remarque est vraie. - sinon, on effectuera 2 trajets pour aller chercher la noix et remonter au 2 On a donc effectué 4 trajets si la noix se casse au 2, donc 2 x 2 trajets. Ainsi de suite jusqu'à trouver l'étage de casse, on ajoute deux trajets à chaque fois que l'on teste un étage de plus : on aura effectué 2 x c trajets au total. Ici, le nombre de trajets ne dépend pas de n.

2 – Lorsque l'étage de casse est strictement supérieur à 2, le nombre de trajets optimal semble être toujours 4 et on l'obtient avec la méthode de n en n avec n valant un de moins que l'étage de casse.

Prenons 6 comme étage de casse et la méthode de 5 en 5 :

	Généralisation : L'étage de casse est c et la méthode est de n en n avec : n = c +1. On monte à n, la noix ne se casse pas. On monte à 2n, la deuxième noix se casse. On redescend chercher la noix intacte. On monte à l'étage n + 1, la noix se casse et c'est fini : on sait que c'est l'étage de casse. Au total, 4 trajets ont été effectués.

3 – Pour les deux premières colonnes du tableau (méthode de 1 en 1 et méthode de 2 en 2), nous avons remarqué des répétitions de calcul, ce qui permet de conjecturer la suite de ces deux colonnes.

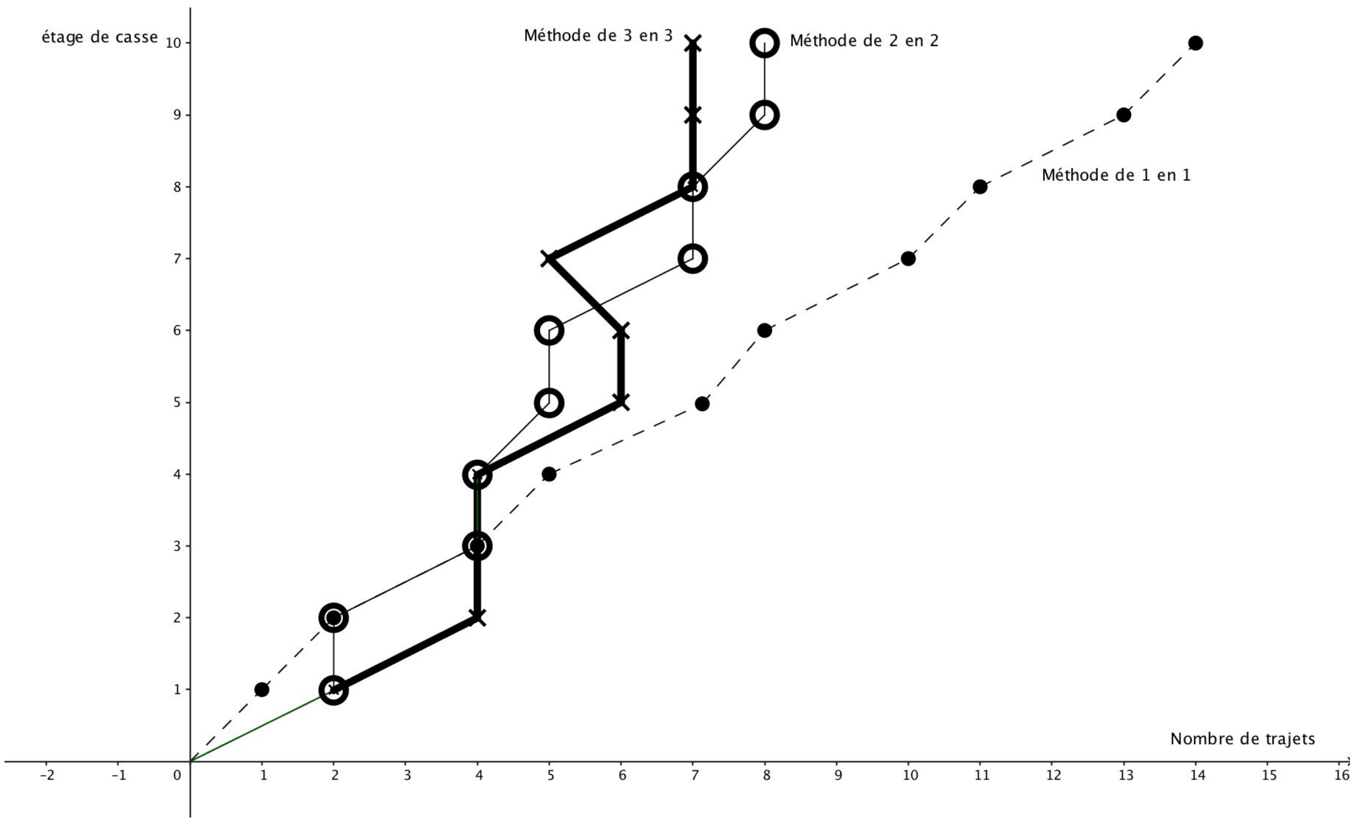
Etage de casse	Nombre de trajets
1	1
2	2
3	4
4	5
5	7
6	8
7	10
8	11
9	13
10	14

De ligne en ligne, on ajoute 1 puis 2 alternativement.

Etage de casse	Nombre de trajets
1	2
2	2
3	4
4	4
5	5
6	5
7	7
8	7
9	8
10	8

A partir de la première ligne, les nombres sont égaux sur deux lignes consécutives uniquement. D'un nombre au suivant, on ajoute alternativement 2 puis 1.

IV – Représentations graphiques des résultats



Sur le graphique suivant, nous avons représenté le rapport entre l'étage de casse et le nombre total de trajets pour trois méthodes.

On se fait une idée des fluctuations des résultats en observant les courbes.

Par exemple, avec la méthode 1 en 1, nous remarquons qu'à partir du 4ème étage de casse, le nombre de trajets n'est pas le plus optimal ; la courbe semble s'éloigner de plus en plus des autres. La courbe représentant la méthode de 2 en 2 s'entremêle avec celle représentant la méthode de 3 en 3. La meilleure méthode est soit celle de 2 en 2 ou bien celle de 3 en 3, après l'étage de casse 3.

CONCLUSION

Nous n'avons pas trouvé de méthode idéale pour répondre à la problématique mais, connaissant l'étage de casse, on peut choisir la (ou les) valeur(s) de *n* qui, avec la méthode de *n* en *n,* nous donnera le minimum de trajets à effectuer. La méthode la plus adaptée, va dépendre de l'étage de casse. Nous pensons qu'il faudrait mélanger différentes méthodes : quand on est face à un grand nombre d'étages, il faut utiliser une méthode rapide en sautant beaucoup d'étages, puis lorsqu'il reste peu d'étages, affiner la méthode. (4)

Notes d'édition

(1)

- Lorsqu'une noix de coco est cassée on ne peut évidemment plus l'utiliser. On continue donc les tests avec une seule noix.
- Pour les méthodes de 2 en 2 et suivantes, une fois qu'une noix de coco se casse il faut tester les étages en dessous.

(2)

La démonstration proposée est basée sur le principe de récurrence. Le résultat est correct mais le raisonnement comporte une petite erreur. En effet si l'on suppose que l'étage de casse est $4k$, on ne peut pas utiliser cette hypothèse pour résoudre le cas où l'étage est $4(k+1)$. Il y a une subtilité dans le raisonnement qui est passée sous silence.

(3)

Dommage que les programmes et les algorithmes utilisés ne soient pas décrits dans l'article.

(4)

Le choix d'une stratégie optimale n'a de sens que si l'on a un minimum de renseignement sur l'étage de casse. L'édition propose un prolongement du problème :

Supposons que l'étage de casse soit aléatoire, de loi équiprobable entre 1 et 20.

Quelle est la stratégie qui va demander en moyenne le moins de déplacements ?