

Modéliser une épidémie

Année 2018 - 2019

Claire ACKERMANN, Elise ROHMER, Henri STEPHAN, élèves de Terminale S

Encadré·es par : Nadine MEYER

Etablissement : Lycée Dr. Eugène KOEBERLE à SELESTAT (67)

Chercheuse : Myriam MAUMY-BERTRAND, Université de Strasbourg IRMA

I. Présentation du sujet

Dans la vie quotidienne, les vaccins proposent certes une protection individuelle : chaque individu, en se vaccinant contre une maladie, est presque assuré de ne pas contracter cette maladie. Mais les vaccins forment aussi une protection collective. En effet, les vaccins empêchent la multiplication de l'agent pathogène chez les personnes vaccinées : elles ne peuvent ainsi pas le transmettre. Plus il y a de personnes vaccinées, moins les agents pathogènes peuvent se développer en eux et donc contaminer les non vaccinés, et donc moins la maladie prendra de l'envergure. Ainsi, plus la proportion de vaccinés sera grande au sein d'une population, moins il y aura de contaminés au sein des non vaccinés. On souhaite, par le biais d'une modélisation, répondre à la question suivante :

La proportion de vaccinés dans une population a-t-elle une influence sur la durée de propagation d'une épidémie et sur le nombre d'individus qu'elle touche ?

Objectif :

Nous cherchons à modéliser simplement la propagation d'une épidémie au sein d'une population finie. Nous souhaitons voir l'influence de certains paramètres tels que la taille de la population de base, le nombre d'infectés à l'instant 0 et surtout le nombre de vaccinés à l'instant 0 sur le temps total de propagation de l'épidémie et sur le nombre final de personnes touchées par l'épidémie.

II. Point de départ

Le point de départ de notre travail est un jeu qui a pour but de montrer simplement comment une épidémie peut se propager au sein d'une population. Le principe de ce jeu peut être résumé comme ci-dessous :

A. La partie théorique :

Nous disposons d'une population d'un effectif connu. Cette population est divisée en quatre catégories : les individus **infectés**, les individus **convalescents mais toujours contagieux**, les individus **immunisés** et les individus **normaux** (c'est-à-dire le reste).

La maladie se propagera au sein de la population par unité de temps (T-0, T-1, ..., T-K, T-K+1, ..., T-F).

Au temps T-0, nous définissons donc la taille de notre population, le nombre d'individus infectés ainsi qu'éventuellement le nombre d'individus vaccinés (pour simplifier, les individus vaccinés seront des individus immunisés de base, à T-0 et donc tout le long de notre jeu).

Au début de chaque unité de temps :

- chaque individu **convalescent** devient **immunisé** et contamine aléatoirement un autre individu
- chaque individu **infecté** devient un individu **convalescent mais toujours contagieux** et contamine aléatoirement un autre individu de la population

Ces deux actions se font simultanément, c'est-à-dire qu'au début de chaque unité de temps, on fait la somme S des **infectés** et des **convalescents** et ce nombre définira le nombre d'individus à contaminer aléatoirement. Pour contaminer aléatoirement des individus de la population, nous attribuons à chaque individu au début du jeu un numéro (allant de 1 à n individus), et, après avoir effectué la somme S, on répète S fois l'expérience « tirer un numéro au hasard entre 1 et n ». Nous aurons alors S numéros, qui correspondront donc aux numéros donnés à chaque individu de notre population, et qui seront donc les individus qui deviendront infectés.

Mise en garde :

- si le numéro tiré correspond à un individu **infecté**, ce dernier n'est pas réinfecté, il devient naturellement **convalescent** (autrement dit, la contamination n'a pas d'effets sur les individus déjà infectés)
- si le numéro tiré correspond à un individu **convalescent**, idem, cela n'a pas d'influence, il passe naturellement dans la catégorie des **immunisés**
- si le numéro tiré correspond à un individu **immunisé** (qu'il soit vacciné de base ou qu'il soit devenu immunisé suite à une contamination préalable), il ne sera pas infecté, la contamination n'a plus d'impact sur les immunisés

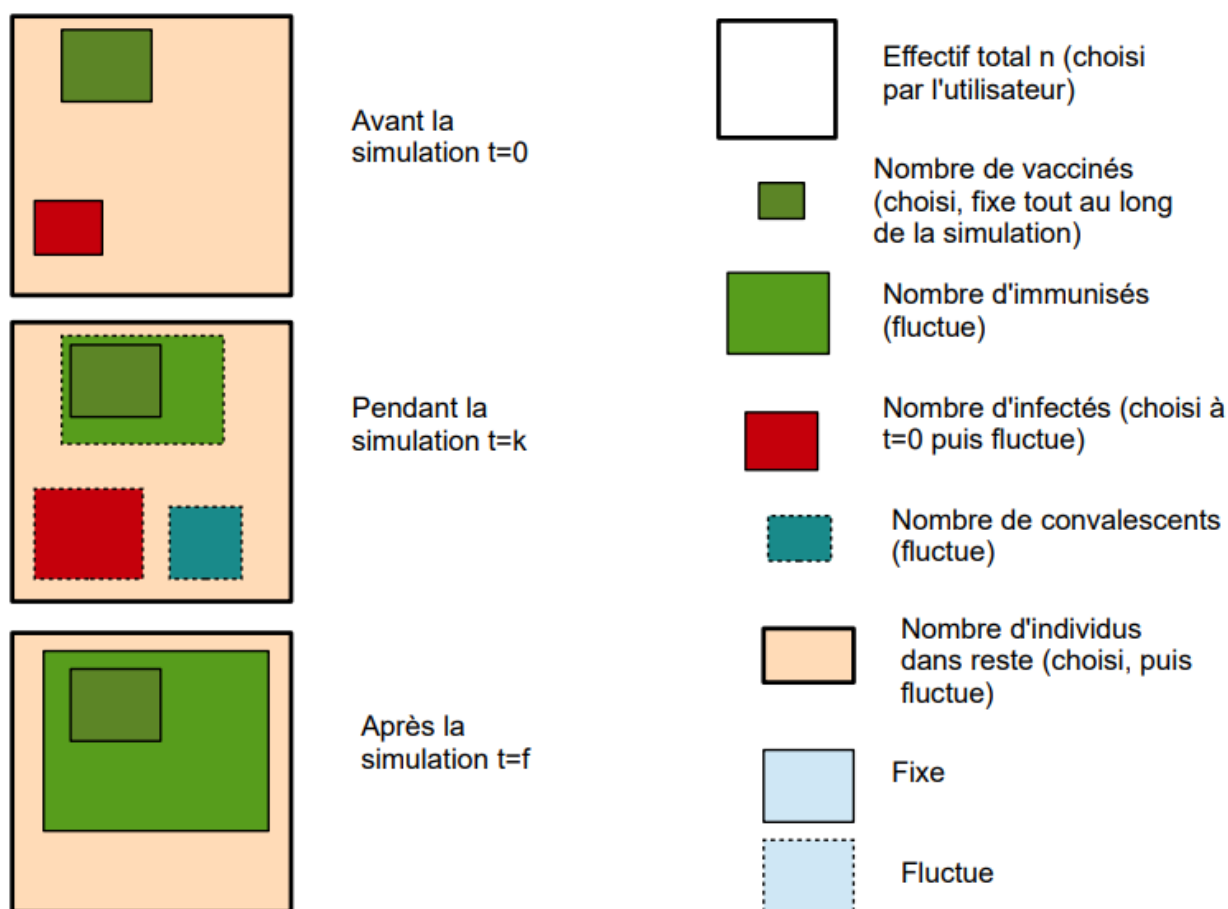
→ en bref, la contamination fait passer un individu dans la catégorie **infecté** uniquement si cet individu faisait partie de la catégorie des individus **normaux**. Elle n'a pas d'impact sur les individus des catégories des infectés, des convalescents et des immunisés. Ainsi, au cours du jeu, les seuls processus possibles pour les individus sont :

T- 0	T- 1	T- 2	T- K	T- Final
infecté	convalescent	immunisé	immunisé	immunisé
immunisé (vacciné)	immunisé	immunisé	immunisé	immunisé
normal	infecté	convalescent	immunisé	immunisé
normal	normal	normal	normal	normal

Tableau représentant les uniques chemins possibles pour un individu donné au cours des unités de temps (avec T- K désignant une étape quelconque comprise entre T- 0 et T- F-1 exclus pour le cas où l'individu est infecté/immunisé dès T- 0, et T- K entre T-0 et T- F-2 exclus pour le cas où l'individu est dans le groupe normal en T- 0). Notons que dans le cas où il n'y a plus d'infectés, pour le(s) dernier(s) individu(s) convalescent(s) $T- K+2 = T- F$.

Le jeu s'arrête lorsque qu'il n'y a plus d'infectés et de convalescents (plus personne ne peut donc contaminer le reste de la population). (1) A la fin du jeu, il ne reste que donc deux populations : les **immunisés**, qui regroupent les vaccinés du départ et tous les individus ayant été infectés au cours du jeu, et les **normaux**, c'est-à-dire la population qui a échappé à la contamination (notons que cette population peut être nulle dans le cas où l'entièreté de la population des normaux s'est fait contaminer au cours du jeu).

Nous pouvons schématiser cette expérience sous formes de boîtes pour mieux comprendre les mouvements d'individus au sein des catégories :



B. La partie pratique :

Nous avons tout d'abord réalisé ce jeu deux fois nous-mêmes, sur un effectif de 18, avec des cartes représentant le groupe auquel appartenait chacun de nos 18 individus et avec un programme nous servant à tirer des nombres aléatoires entre 1 et 18 afin d'avoir une première approche avec ce jeu et relever les éventuels problèmes. Nous nous intéressons particulièrement à la durée de la propagation de l'épidémie (au bout de combien d'étapes le jeu est fini, c'est-à-dire au bout de combien d'étapes il n'y a plus d'infectés et plus de convalescents) et au nombre de personnes dans la catégorie des individus normaux à la fin du jeu (c'est-à-dire combien de personnes, par rapport à notre effectif de base, n'ont pas été touchées par l'épidémie). Nous avons obtenu les résultats suivants :

sans vaccin		nombre d'infecté(s) au départ : 1		effectif : 18	
	Infecté(s)	Convalescent(s) mais toujours contagieux	Immunisé(s)	Reste	
T-0	1	0	0	17	
T-1	1	1	0	16	
T-2	2	1	1	14	
T-3	2	2	2	12	
T-4	1	2	4	11	
T-5	1	2	6	9	
T-6	2	1	8	7	
T-7	1	2	9	6	
T-8	1	1	11	5	
T-9	1	1	12	4	
T-10	0	1	13	4	
T-11	0	0	14	4	

sans vaccin		nombre d'infecté(s) au départ : 1		effectif : 18	
	Infecté(s)	Convalescent(s) mais toujours contagieux	Immunisé(s)	Reste	
T-0	1	0	0	17	
T-1	1	1	0	16	
T-2	2	1	1	14	
T-3	2	2	2	12	
T-4	2	2	4	10	
T-5	1	2	6	9	
T-6	0	1	8	9	
T-7	1	0	9	8	
T-8	0	1	9	8	
T-9	0	0	10	8	

Nous observons qu'avec le même effectif de départ et le même nombre d'infectés de base, le jeu ne se finit pas au bout du même nombre d'unités de temps et le nombre d'individus dans la catégorie des normaux à la fin du jeu est différent. Il serait donc intéressant de reproduire ce jeu sur Python afin de pouvoir le faire un grand nombre de fois en modifiant certains paramètres (taille de la population, nombre d'infectés de départ, nombre de vaccinés) et observer leur influence.

III. Notre travail sur Python :

Nous souhaitons réaliser un programme afin de répéter de manière aléatoire la propagation d'une épidémie un grand nombre de fois sur une population donnée en faisant éventuellement varier uniquement les

paramètres suivants : taille de la population de base, nombre d'infectés à T-0 et nombre de vaccinés à T-0. Nous nous intéressons particulièrement à deux données : le nombre d'unités de temps passées pendant la propagation de l'épidémie et le nombre de non immunisés à la fin de la propagation (c'est-à-dire ceux qui n'ont été ni infectés ni immunisés dès le début).

Nous allons maintenant détailler en plusieurs étapes le programme que nous avons réalisé.

Étape 0 – Mise en place des différentes listes et diagrammes :

Tout d'abord, on demande au début du programme à l'utilisateur de rentrer plusieurs paramètres comme la taille de la population totale, l'effectif d'individus dans la catégorie des **normaux** (non infectés, non vaccinés), la part d'**infectés** et celle de **vaccinés**, ainsi que le pourcentage de chance pour un individu infecté ou convalescent mais toujours contagieux de contaminer quelqu'un (un infecté/convalescent ne contamine pas forcément quelqu'un selon le pourcentage rentré).

```

1 from random import*
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 #définir taille population, dont vaccinés et individus dans reste, pourcentage de chance de contamination
6 n = int(input("Nombre de personnes au total (effectif total) : "))
7 nbReste = int(input("Nombre de personnes dans reste (nombre de non infectés) (strictement inférieur à l'effectif total): ")) #nbreste= n (eff tot) - (vaccinés/immunisés + infectés)
8 v=int(input("Nombre de vaccinés (immunisés d'office) (inférieur à l'effectif total moins le nb d'indivus dans reste):"))
9 prob=int(input("Pourcentage de chance qu'un infecté/convalescent puisse transmettre la maladie à une autre personne (un nombre entier compris entre 1 et 100 est attendu):"))
10

```

Ensuite, on crée des listes pour classer les différents cas observables. Chaque catégorie est représentée par une liste de nombres dans laquelle les individus sont eux-mêmes représentés par des nombres. Un nombre correspond à un individu. De ce fait, on pourra facilement modéliser le passage des individus d'une catégorie à l'autre, par exemple quand ils se font contaminer, en changeant de liste le nombre qui représente l'individu en question.

```

11
12 #création des listes reste (= non touchés par la maladie), immunisés, infectés, convalescents
13 reste = []
14 for i in range(nbReste):
15     reste.append(i+1)
16
17 infecté=[]
18 m=n-nbReste-v #nb d'infectés = (effectif tot n - nb reste - nb vaccinés)
19 for j in range(m):
20     infecté.append(nbReste+v+j+1) #remplissage infectés
21
22
23 immunisé=[]
24 for h in range(v):
25     immunisé.append(nbReste+h+1) #remplissage immunisés avec vaccinés
26
27 convalescent=[]
28

```

Enfin, on demande au programme de nous afficher les résultats sous la forme d'un diagramme (qui sera défini en 2 parties : une partie pour l'étape T-1, l'autre pour toutes les autres étapes).

```

29 #AFFICHAGE DIAGRAMME POUR ETAPE 0
30 plt.bar(0,len(immunisé),1.0,color='limegreen')
31 plt.bar(0,len(convalescent),1.0,color='steelblue',bottom=len(immunisé))
32 plt.bar(0,len(infecté),1.0,color='firebrick',bottom=len(immunisé)+len(convalescent))
33 plt.bar(0,len(reste),1.0,color='tan',bottom=len(immunisé)+len(convalescent)+len(infecté))
34 plt.bar(0,v,1.0,color='forestgreen')
35
36

```

Etape 1 – Initialisation de la première étape du programme :

Tout d'abord, on met en place l'étape T-1 et on effectue les changements de catégories d'infecté à

convalescent et de convalescent à immunisé.

```
37 #ETAPE 1
38
• 39 immunisé=immunisé+convalescent #convalescents->immunisés
• 40 convalescent=infecté #infectés->convalescents
• 41 infecté=[]
• 42 for o in range (m): #nb infect
• 43     p=randint(1,100) #proba de contaminer
• 44     if p<=prob:
• 45         k=randint(1,n)
• 46         if k in reste:
• 47             infecté.append(k) #si individu dans reste, ->infecté
• 48             reste.remove(k)
• 49
```

Ensuite, on affiche le diagramme pour l'étape 1.

```
50 #AFFICHAGE DIAGRAMME POUR ETAPE 1
• 51 plt.bar(1,len(immunisé),1.0,color='limegreen')
• 52 plt.bar(1,len(convalescent),1.0,color='steelblue',bottom=len(immunisé))
• 53 plt.bar(1,len(infecté),1.0,color='firebrick',bottom=len(immunisé)+len(convalescent))
• 54 plt.bar(1,len(reste),1.0,color='tan',bottom=len(immunisé)+len(convalescent)+len(infecté))
• 55 plt.bar(1,v,1.0,color='forestgreen')
56
```

(2)

Etape 2 – Programmation de T-2 à T-F :

On met en place la suite du programme qui définit les mouvements des individus au sein des catégories (au sein des listes). On met en place un compteur pour les unités de temps.

```
58 #ETAPE 2 A F
• 59 t=1
• 60 N=len(infecté)+len(convalescent) #N : nb de personnes qui contaminent à chaque étape
• 61 while N>0:
• 62     immunisé=immunisé+convalescent
• 63     convalescent=infecté
• 64     infecté=[]
• 65     for i in range(N):
• 66         q=randint(1,100) #proba contaminer
• 67         if q<=prob:
• 68             l=randint(1,n)
• 69             if l in reste:
• 70                 infecté.append(l)
• 71                 reste.remove(l)
• 72     N=len(infecté)+len(convalescent) #pour que le nb d'individus qui contaminent soit à jour
• 73
• 74     t=t+1
• 75
```

Ensuite, on affiche la partie du diagramme de T-2 à T-F.

```
76 #AFFICHAGE DIAGRAMME POUR ETAPE 2 A F
• 77 p1=plt.bar(t,len(immunisé),1.0,color='limegreen') #nb immunisé
• 78 p2=plt.bar(t,len(convalescent),1.0,color='steelblue',bottom=len(immunisé))
• 79 p3=plt.bar(t,len(infecté),1.0,color='firebrick',bottom=len(immunisé)+len(convalescent))
• 80 p4=plt.bar(t,len(reste),1.0,color='tan',bottom=len(immunisé)+len(convalescent)+len(infecté))
• 81 p5=plt.bar(t,v,1.0,color='forestgreen') #nb vaccinés à la fin pour superposition avec immunisés
82
```

Etape 3 – Affichage des résultats :

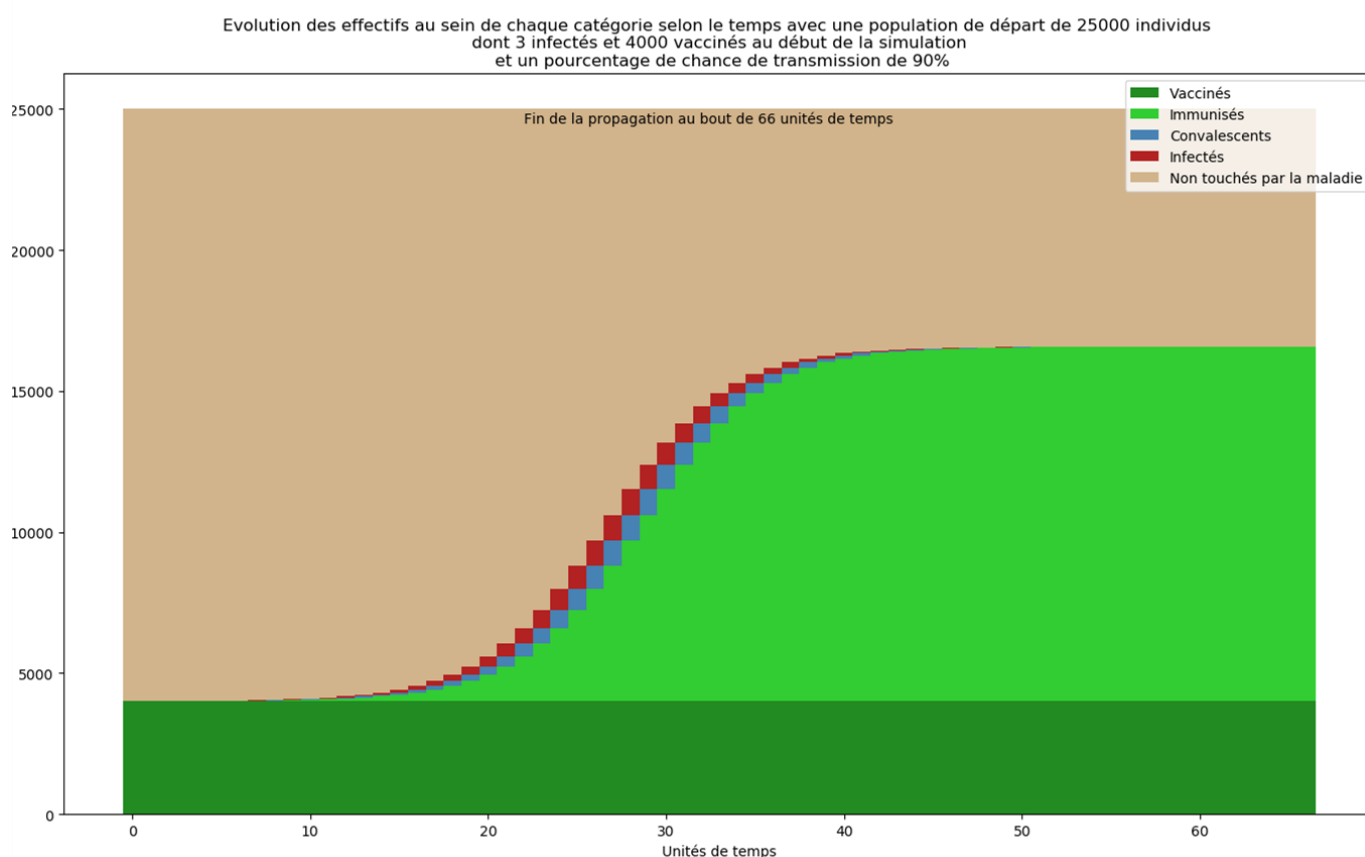
On demande au programme de nous afficher les différents résultats obtenus.

```

• 87 print("RECAPITULATIF :")
• 88 print("Effectif total :")
• 89 print(n)
• 90 print("nombre d'infecté(s) à t0 :")
• 91 print(m)
• 92 print("nombre de vacciné(s) à t0 :")
• 93 print(v)
• 94 print("nombre d'individu(s) dans reste à t0 :")
• 95 print(nbReste)
• 96 print("pourcentage de chance qu'un infecté ou convalescent puisse contaminer")
• 97 print(prob)
• 98 print("durée de l'épidémie en unité de temps :")
• 99 print(t)
• 100 print("nombre de personnes touchées par l'épidémie (infectées, puis devenues immunisées (hors immunisés d'office)) :")
• 101 print(len(immunisé)-v)
• 102 print("nombre de personnes touchées par l'épidémie (hors infectés à t0 et immunisés d'office)")
• 103 print(len(immunisé)-v-m)
• 104 print("nombre de personnes ayant évité l'épidémie (hors immunisés d'office) :")
• 105 print(len(reste))
• 106
• 107 plt.title("Evolution des effectifs au sein de chaque catégorie selon le temps avec une population de départ de " + str(n) + " individus \n dont "
• 108 plt.ylabel('Effectif')
• 109 plt.xlabel('Unités de temps')
• 110 plt.legend((p5[0], p1[0], p2[0], p3[0], p4[0],), ('Vaccinés', 'Immunisés', 'Convalescents', 'Infectés', 'Non touchés par la maladie'))
• 111 plt.text(t/3, n-(1/50*n), "Fin de la propagation au bout de " + str(t) + " unités de temps")
• 112 plt.show()

```

Un exemple de graphique obtenu de l'évolution au cours du temps des effectifs au sein de chaque catégorie, avec une population de départ de 25 000 individus dont 3 infectés et 4000 vaccinés au début de la simulation, ainsi qu'un pourcentage de chance de transmission de 90 %.



L'épidémie se propage durant 66 unités de temps, avant qu'il n'y ait plus d'infectés et de convalescents.

Avec un graphique de ce type, nous obtenons une bonne représentation globale de la propagation de l'épidémie au sein de notre population, ainsi que les variations des effectifs de chaque catégorie au cours du temps. Néanmoins, ce type de présentation des résultats est peu utile pour émettre des conjectures quant à

l'influence de certains paramètres sur la durée de la propagation, le nombre d'individus touchés... C'est pourquoi nous allons donc analyser des données chiffrées obtenues à partir de notre programme.

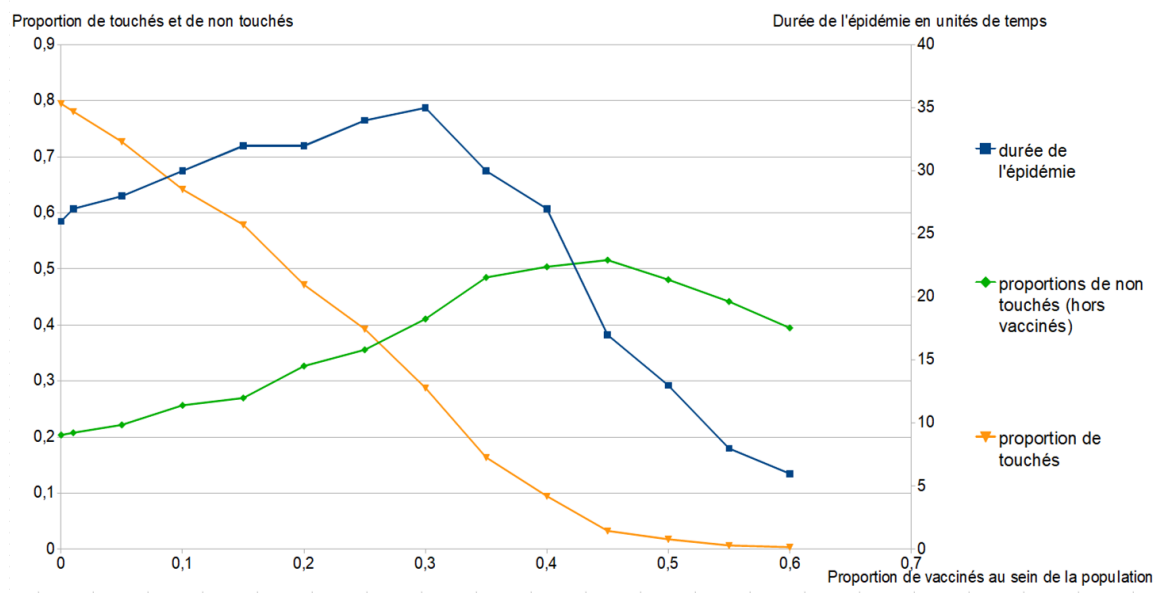
IV. Obtention de données grâce au programme

A l'aide de notre programme, nous effectuons à chaque fois 100 répétitions de notre simulation en gardant les mêmes paramètres (effectif total de 1000 individus, 1 infecté au début de la simulation, un pourcentage de chance de transmission de 100%). Nous faisons néanmoins varier d'une expérience à l'autre la proportion de vaccinés dans la population totale (proportion de 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6).

Nous nous intéressons alors aux paramètres suivants à la fin de la simulation : durée de l'épidémie, nombre d'individus épargnés par l'épidémie, nombre d'individus touchés par l'épidémie.

Éléments choisis par l'utilisateur														
Nombre d'individus dans la population	1000													
Nombre d'infectés au début de la simulation	1													
Nombre d'individus vaccinés au début de la simulation	0	10	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
Proportion de vaccinés	0	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
Moyenne des résultats des simulations														
Unités de temps	26	27	28	30	32	32	34	35	30	27	17	13	8	6
Nombre d'individus non touchés par l'épidémie (hors vaccinés)	204	208	222	257	270	327	356	411	485	504	516	481	442	395
Nombre d'individus touchés par l'épidémie	795	781	727	642	579	472	393	288	164	95	33	18	7	4

Tableau représentant la moyenne des résultats obtenus pour 100 répétitions pour chaque variation de la proportion de vaccinés sur une population de 1000 individus



(3)

Graphique représentant la durée de l'épidémie, la proportion d'individus touchés et non touchés par l'épidémie en fonction de la proportion d'individus vaccinés (résultats obtenus par une moyenne de 100 répétitions sur une population de 1000 individus)

V. Analyse des résultats : l'influence de la vaccination sur une population

La proportion de vaccinés dans une population a-t-elle une influence sur la durée de propagation d'une épidémie et sur le nombre d'individus qu'elle touche ?

Nous allons vérifier si notre programme suit le principe selon lequel les vaccins représentent non seulement une protection individuelle, c'est-à-dire qu'elle réduit fortement les chances qu'un individu vacciné soit contaminé, mais aussi une protection collective, c'est-à-dire que les vaccins freinent la propagation d'une maladie, et ce même chez les individus non vaccinés. En bref, nous allons étudier l'influence de la proportion de vaccinés d'une population donnée sur la durée de l'épidémie, ainsi que sur la proportion d'individus touchés par l'épidémie.

Ainsi, comme nous pouvons aisément le constater, plus la proportion de vaccinés au sein de la population est élevée, plus la proportion d'individus touchés par l'épidémie sera faible. Cela provient du fait que tout d'abord, les vaccinés ne peuvent être contaminés dans notre simulation, donc plus leur proportion est grande au sein de la population, moins il existe d'individus susceptibles d'être contaminés : c'est la protection individuelle. Mais cette observation découle aussi du fait que les individus vaccinés permettent une protection collective. En analysant la proportion d'individus non touchés par l'épidémie (en ne comptant pas dedans les vaccinés), nous pouvons observer que plus la proportion de vaccinés est élevée, plus la proportion d'individus non touchés est haute. Or cette proportion, dans l'élaboration de nos données, ne prend pas en compte les vaccinés (elle comptabilise uniquement les individus de la catégorie « normaux » qui n'ont pas été touchés). Quand le nombre de vaccinés augmente, notre proportion n'est donc pas directement gonflée par cet ajout de vaccinés, mais par leur impact sur l'ampleur prise par l'épidémie.

En conséquent, si de moins en moins d'individus sont contaminés dès lors que la proportion de vaccinés augmente, on comprend aisément la baisse de la durée de propagation de l'épidémie, celle-ci devenant alors plus locale et de plus faible envergure.

Cependant, dans notre cas, on peut remarquer que le vaccin est efficace à 100%. Or, en réalité, cette perfection est difficilement atteignable. Il faudrait alors modifier notre programme pour qu'il prenne en compte les personnes vaccinées comme personnes contaminables. L'impact que les vaccinés ont sur l'épidémie reste cependant indéniable.

En définitive, nous pouvons donc admettre un réel impact de protection individuelle et de protection collective de la proportion de vaccinés sur le reste de la population : plus la proportion d'individus vaccinés est grande, moins il y aura d'individus touchés par l'épidémie. L'épidémie prendra alors moins d'ampleur, en découlera alors une faible durée de propagation de l'épidémie, si la proportion de vaccinés est suffisante. (4)

Notes d'édition

(1) On admettra (ce n'est pas si évident!) que le jeu s'arrête effectivement avec probabilité 1.

(2) Lignes de code 44 et 45, puis 66 et 67 :

Une probabilité de contamination est ajoutée au modèle ; plus précisément, c'est la probabilité qu'une contamination soit « tentée » : que l'on tire un individu au hasard, et qu'il soit contaminé s'il était jusqu'alors normal.

(3) On a l'impression que vacciner plus de 45 % de la population conduit à une plus faible proportion de non touchés, autrement dit qu'on puisse vacciner « trop » de gens : il n'en est rien, le choix des données affichées est ici un peu maladroite. Les auteurs affichent la proportion de non-vaccinés épargnés par l'épidémie dans toute la population, qui finit forcément par baisser quand on augmente la proportion de vaccinés (si 100 % des individus sont vaccinés, 0 % sont non-vaccinés épargnés...).

Il serait plus pertinent d'afficher la proportion d'épargnés parmi les non-vaccinés, qui augmente, comme on peut s'y attendre, avec le taux de vaccinés.

(4) Ce phénomène d'immunité de groupe n'a ici été mis en évidence que pour un modèle très particulier, mais s'observe avec bien d'autres modèles ainsi que dans la pratique. Certaines personnes à la santé fragile ne peuvent pas être vaccinées, et vacciner une grande proportion de la population permet de les protéger.