

Modélisation de croissance naturelle 2014-2015

Par Felix D'HURLABORDE, Adèle FINE, Margot ISSERTINE et Claire MAILLET élèves de première S au Lycée d'Altitude de Briançon (Hautes-Alpes-05).

Par Matei PAPAHAGI et Raluca ROMAN, classe de IX au Colégiul National Emil Racovita de Cluj (Roumanie).

Enseignantes : Ariana-Stanca Vacaretu

Chercheuse : Adela Lupescu (Universitatea Bades-Bolyai de Cluj-Napoca)

Enseignants : Hubert PROAL et Mickaël LISSONDE

Chercheurs : Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis).

Vous pouvez télécharger des documents et simulations sur ce sujet sur le site

<http://www.informatiques.fr/MeJ.html> de Yves Papegay.

Présentation du sujet

Le biologiste hongrois, Aristid Lindenmayer, a mis au point un système de modélisation du processus de développement et de prolifération des plantes, bactéries ou d'autres éléments naturels : le L-système.

Résultats obtenus

A partir de l'observation de certaines croissances naturelles, les élèves ont proposé des modèles de L-systèmes qui programment et font évoluer dans le but de confronter le modèle à la réalité.

Valorisations des travaux

Présentations lors de la semaine des maths à Briançon (mars 2015)

Présentation lors du « Forum of the math research projects » à Cluj-Napoca (mars 2015)

Présentation lors du congrès *MATh.en.JEAN'S* à l'Université d'Avignon (mars 2015)

Participation aux qualifications académique du concours Faites de la science à Marseille (avril 2015) – prix Hassane Bitar qui leur permet de représenter l'Université d'Aix-Marseille à la finale.

Présentation lors du « Math Youth Forum » à Cluj-Napoca (mai 2015)

Participation à la finale nationale du concours Faites de la science à Montpellier (mai 2015) – premier prix dans la catégorie « informatique et robotique » et prix des lycéens.

Présentations lors du forum PASS à Aix-en-Provence (juin 2015)

Texte de l'article

Sujet :

Étudier des feuilles d'arbre, des fleurs ou des coquilles d'escargots pour proposer un modèle d'évolution du type des L-systèmes. (1)

Les élèves de Cluj ont étudié la croissance d'une coquille d'escargot que l'on peut retrouver dans certains développements de plantes et les élèves de Briançon ont cherché à modéliser la croissance d'une feuille de platane. Il y a eu un séminaire à Cluj entre les deux groupes et une vidéo-conférence où les élèves ont exposé leurs résultats et leurs démarches. Les modèles choisis étant différents, ce texte se divise en deux parties :

I. Feuille de platane (en français)

II. Iterative structures in nature (en anglais)



Séminaire entre les deux établissements à Cluj

I. Feuille de platane

1) La tige

a) Observations



La tige est un segment rectiligne

b) Modélisation

Nous avons pensé à deux manières de modéliser la croissance d'une tige avec les L-systèmes.

Modèle 1.1

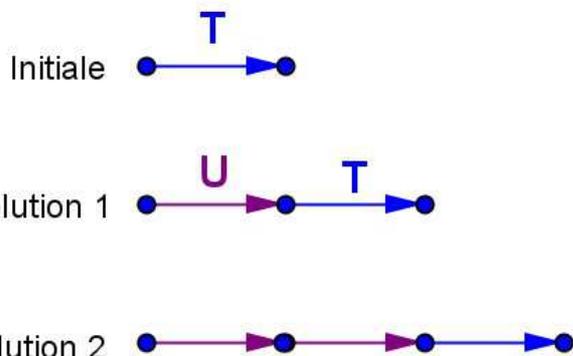
Alphabet {T,U}

T et U sont deux vecteurs identiques de longueur 1

Axiomes :

$U \rightarrow U$

$T \rightarrow UT$



Modèle de croissance de tige 1.1

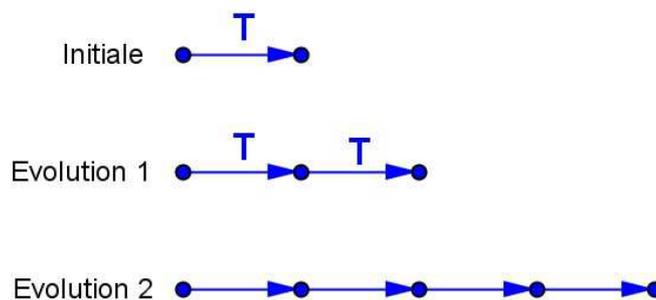
Modèle 1.2

Alphabet {T}

T est un vecteur de longueur 1

Axiome :

$T \rightarrow TT$



Modèle de croissance de tige 1.2

On comprend que dans le modèle 1.2 l'évolution est bien plus rapide et on peut même imaginer un axiome $T \rightarrow TTT$

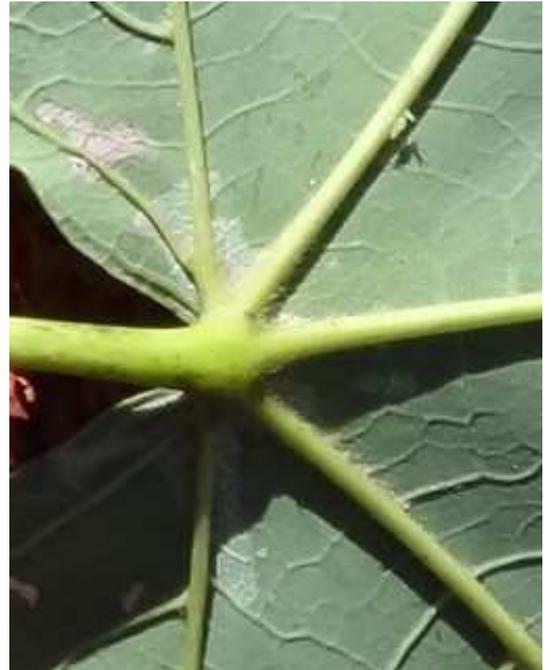
Nombre de lettres à l'évolution n : $n+1$ pour le modèle 1.1, 2^n pour le modèle 1.2

2) Le bourgeon

a) Observations

Le bourgeon à l'extrémité de la tige donne naissance à 5 tiges dont les angles font 45°

Au vu de l'épaisseur des tiges, on peut penser qu'elles ne « naissent » pas en même temps.



b) Modélisation

Nous proposons deux modèles pour ce bourgeon

Modèle 2.1

Alphabet $\{B, Q, R, S\}$

B est le bourgeon, Q, R et S des modèles de croissance (par exemple 1.1 et 1.2)

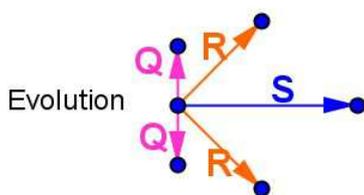
Axiomes :

$B \rightarrow [++Q][+R][S][R][--Q]$

Q modèle 1.1 ou 1.2 ou autre

R modèle 1.1 ou 1.2 ou autre

S modèle 1.1 ou 1.2 ou autre



Modèle de croissance de bourgeons 2.1

Modèle 2.2

Alphabet $\{B, C, D, E, F, P\}$

B, C, D, E et F sont des bourgeons et P est un modèle (par exemple 1.1 ou 1.2)

Axiomes :

$B \rightarrow [+C][P][-D]$

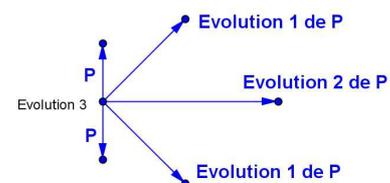
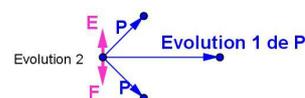
$C \rightarrow [+E]P$

$D \rightarrow [-F]P$

$E \rightarrow P$

$F \rightarrow P$

P modèle 1.1 ou 1.2 ou autre



Modèle de croissance de bourgeons 2.2

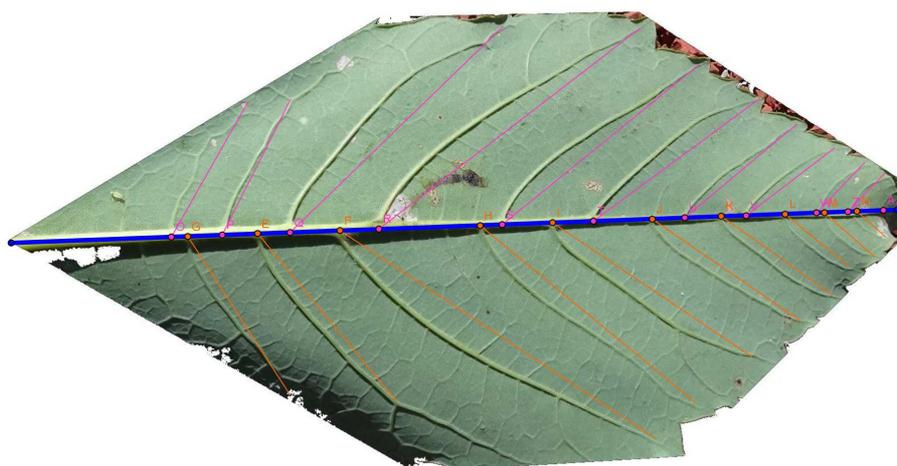
3) Les nervures

a) Observations



Nous remarquons que le type de nervure semble identique et nous interprétons les différences de taille comme le fait qu'elles ne sont pas nées en même temps.

Analyse de la nervure centrale



Nervure centrale

- La nervure centrale est un segment composé de 10 bourgeons d'un côté et 10 de l'autre (à peu près)
- Les bourgeons centraux semblent les plus anciens
- Les écarts entre les bourgeons, à la fin de la nervure, sont de plus en plus petits.
- L'absence de bourgeons en début de nervures

Analyse des nervures accolées à la nervure centrale



Les deux nervures accolées à la nervure centrale

- Comme la nervure centrale, elles sont composées de 10 bourgeons de chaque côté. Ce qui nous oriente plutôt vers notre modèle 2.1.
- Les bourgeons centraux semblent les plus anciens, car les nervures qu'ils engendrent sont les plus longues. Mais nous pouvons aussi imaginer que les nervures engendrées par les bourgeons du début se sont « mélangées » avec celles de la nervure centrale. (2)
- Les écarts entre les bourgeons, à la fin de la nervure, sont de plus en plus petits.
- L'absence de bourgeons en début de nervures. Idée du « mélange » ci-dessus.
- La longueur des nervures correspond à 90 % de la longueur de la nervure centrale.

Analyse des deux nervures latérales

Nous obtenons les mêmes constatations, la longueur représente 60 % de la longueur de la nervure centrale.

b) Modélisation

Pour avoir un phénomène où les bourgeons centraux sont les « plus anciens », on peut imaginer une croissance des deux extrémités de la nervure.

Modèle 3.1

Alphabet $\{U, P, R, S\}$

U est une tige, R et S des bourgeons et P un modèle
a correspond à une rotation de $+75^\circ$ et b à une rotation de -75°

Axiomes :

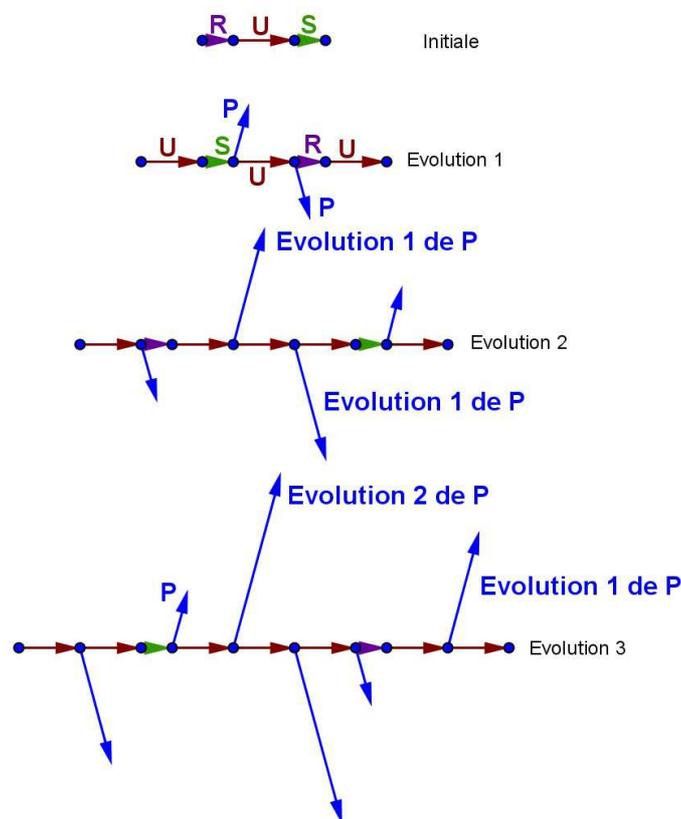
$U \rightarrow U$

$R \rightarrow US[aP]$

$S \rightarrow [bP]RU$

P modèle 1.1 ou 1.2

Départ : RUS



Évolutions du modèle 3.1

Nous remarquons, au bout de 3 évolutions, que les évolutions de P ne vont pas s'organiser correctement.

Longueur de la nervure à l'évolution n pour le modèle 3.2, c'est-à-dire nombre de U :

Évolution	0	1	2	...	n
Longueur	1	5	9	...	$4n+1$

Modèle 3.2

Alphabet $\{C, D, U, P\}$

C et D sont des bourgeons, U une tige et P un modèle

a correspond à une rotation de $+75^\circ$ et b à une rotation de -75°

Axiomes :

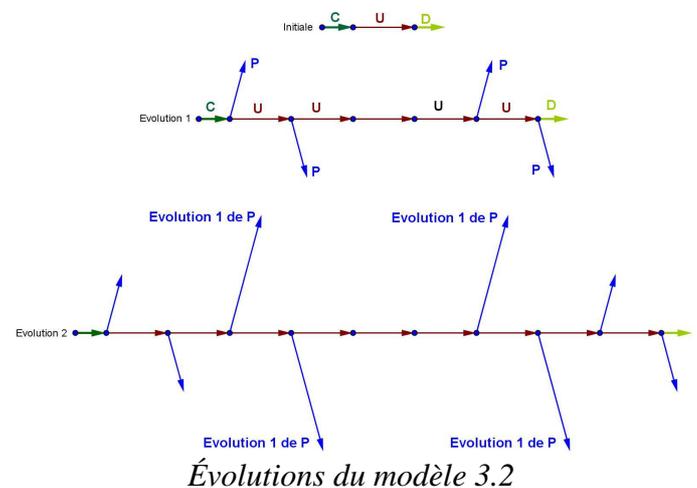
$U \rightarrow U$

$C \rightarrow C[aP]U[bP]U$

$D \rightarrow U[aP]U[bP]D$

P modèle 1.1 ou 1.2 ou autre

Départ : CUD



Modèle 3.3

Variante du modèle 3.2 où $C \rightarrow CUU$.

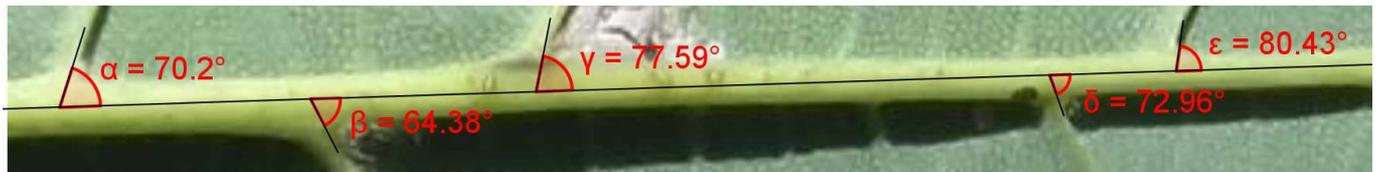
On ne modélise pas les nervures sur une partie de la feuille car elles vont se confondre avec la feuille.

4) Les petites nervures

a) Observations



Petites nervures



Angles des petites nervures

- Les petites nervures ne sont pas rectilignes, elles commencent avec un angle de 75° , puis tendent vers un angle de 45° (par rapport à la nervure mère)
- Sur chaque nervure partent de petites nervures (une bonne dizaine) qui n'évoluent pas.

b) Modélisations

Modèle 4.1

Alphabet $\{P,U,T\}$

U et T sont des tiges de même longueur et P une tige de longueur moindre

Axiomes :

$U \rightarrow U$

$P \rightarrow P$

$T \rightarrow dU[++P]U[--P]T$

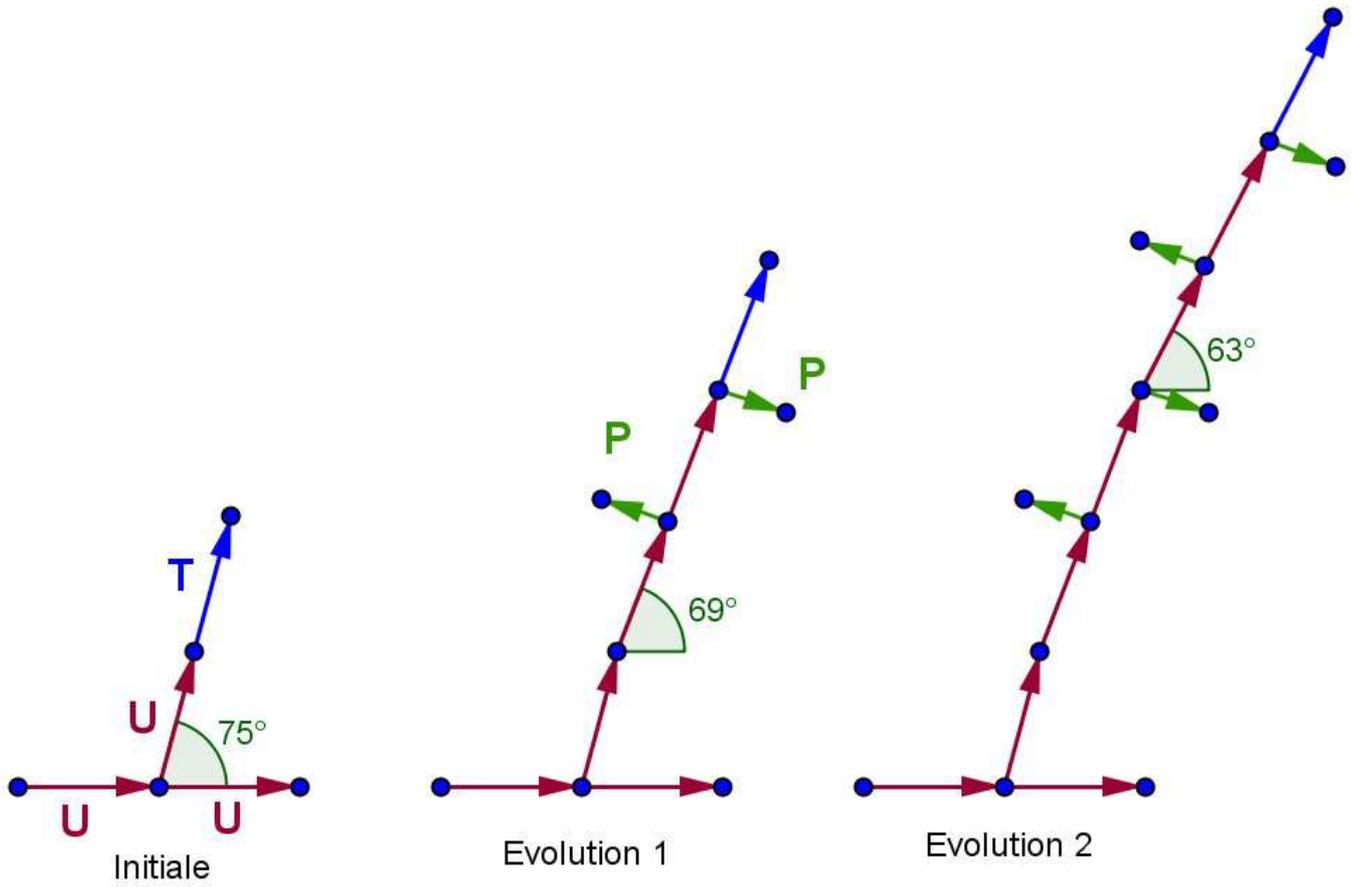
+ correspond à tourner de 45° dans le sens direct et – dans le sens indirect

d correspond à tourner dans le sens indirect de 6°

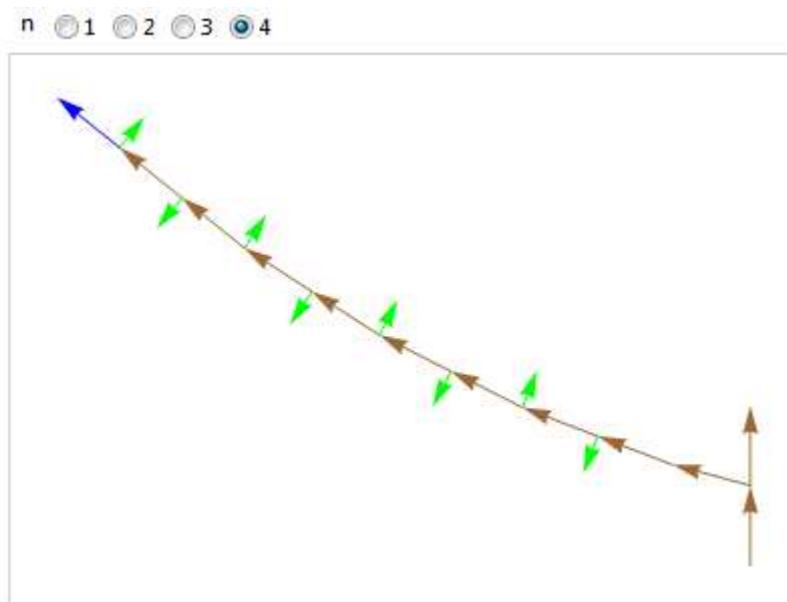
Départ : UT

Il va de soit que nous avons l'axiome $T \rightarrow gU[--P]U[++P]T$ pour la partie du bas ou g correspond à tourner dans le sens direct de 6°

La longueur de la nervure en fonction de l'évolution n est $2n+2$



Évolutions selon le modèle 4.1

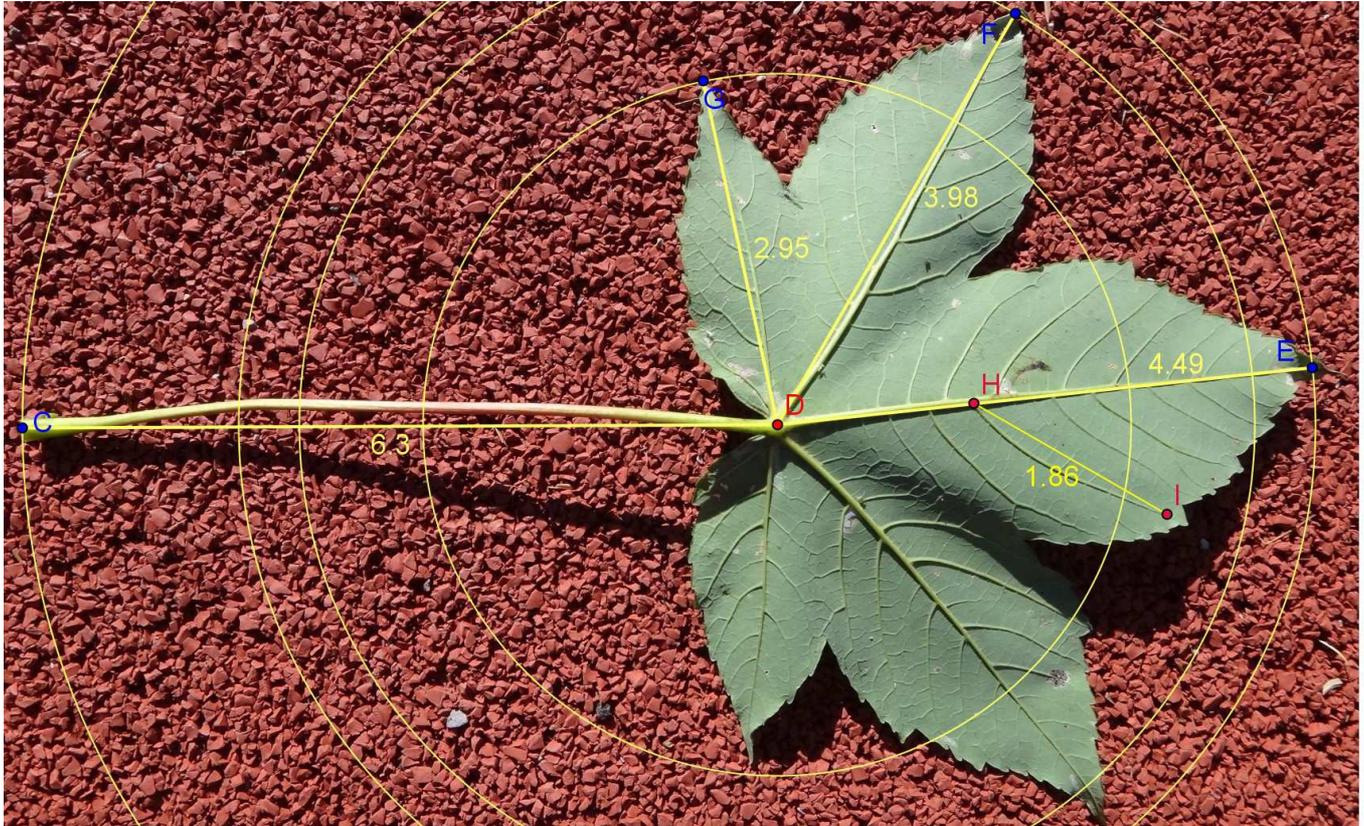


Évolution du modèle 4.1 à l'étape 4 (mathematica)

5) Modélisation générale de la feuille de platane

Nous allons combiner nos modèles pour réaliser une feuille de platane

a) Détermination du nombre d'évolutions



Dimensions de la feuille de platane

Sur la nervure [DE], il y a 10 bourgeons vers le haut et 10 vers le bas (voir nervure centrale page 5). Or dans le modèle 3.2, pour avoir 10 bourgeons vers le haut il faut faire 5 évolutions. Le nombre d'éléments de la nervure centrale est alors de 21. Ainsi un élément de la nervure centrale fera à peu près 0,21

Si l'on poursuit ce raisonnement, pour la nervure [DF], un élément devra faire 0,19 et un de la nervure [DG] 0,14.

Si l'on prend le modèle 1.1, en 5 évolutions nous avons 6 éléments, donc un élément doit faire à peu près 1.

Enfin le modèle 4.1 en 5 évolutions va donner 12 segments, ce qui veut dire que chaque élément fera 0,16

b) Modèle général

Tige : modèle 1.1
 Alphabet : {**U,T**}
 U et T des vecteurs
 (horizontaux) de longueur 1.
 Axiomes :
U → **U**
T → **UT**
 Départ : T

Bourgeon : modèle 2.1
 Alphabet : {**B**}
 + correspond à une rotation de +45° et – une rotation de -45°
 Axiomes :
B → [++modèle 3.2][+modèle 3.3][modèle 3.3][-modèle 3.3][--modèle 3.2]
 Départ : B

Nervure centrale : modèle 3.3
 Alphabet {**C,D,V**}
 C et D sont des bourgeons, V une tige de 0,21
 a correspond à une rotation de +75° et b à une rotation de -75°
 Axiomes :
V → **V**
C → **CVV**
D → **V[a modèle 4.1.d]V[b modèle 4.1.g]D**
 Départ : CVD

Nervures accolées à la nervure centrale : modèle 3.3
 Alphabet {**E,F,W**}
 E et F sont des bourgeons, W une tige de 0,19
 a correspond à une rotation de +75° et b à une rotation de -75°
 Axiomes :
W → **W**
E → **EW**
F → **W[a modèle 4.1.d]W[b modèle 4.1.g]F**
 Départ : EWF

Nervures latérales : modèle 3.2
 Alphabet {**G,H,X**}
 G et H sont des bourgeons, X une tige de 0,14
 a correspond à une rotation de +75° et b à une rotation de -75°
 Axiomes :
X → **X**
G → **G[a modèle 4.1.d]X[b modèle 4.1.g]X**
H → **X[a modèle 4.1.d]X[b modèle 4.1.g]H**
 Départ : GXH

Nervures : modèle 4.1.d
 Alphabet {**P,Y,Z**}
 P, Y et Z sont des tiges de longueur 0,16
 d correspond à tourner de -6°
 Axiomes :
Y → **Y**
P → **P**
Z → **dY[+P]Y[-P]Z**
 Départ : YZ

Nervures : modèle 4.1.g
 Alphabet {**P,Y,A**}
 P, Y et A sont des tiges de longueur 0,16
 g correspond à tourner de +6°
 Axiomes :
Y → **Y**
P → **P**
A → **gY[+P]Y[-P]A**
 Départ : YA

c) Bilan et résultats (voir annexe 4 pour le programme)

Alphabet : {U,T,B,C,D,E,F,G,H,V,W,X,P,Y,Z,A}

U et T des vecteurs (horizontaux) de longueur 1, V une tige de 0,21, W une tige de 0,19, X une tige de 0,14, P, et Y sont des tiges de longueur 0,16

B,C,D,E,F,G,H,Z et A sont des bourgeons,

+ correspond à une rotation de $+45^\circ$ et - une rotation de -45°

a correspond à une rotation de $+75^\circ$ et b à une rotation de -75°

d correspond à tourner de -6° et g correspond à tourner de $+6^\circ$

Axiomes :

U → U

T → UT

V → V

C → CVV

D → V[aYZ]V[bYA]D

W → W

E → EWW

F → W[aYZ]W[bYA]F

X → X

G → G[aYZ]X[bYA]X

H → X[aYZ]X[bYA]H

Y → Y

P → P

Z → dY[+P]Y[-P]Z

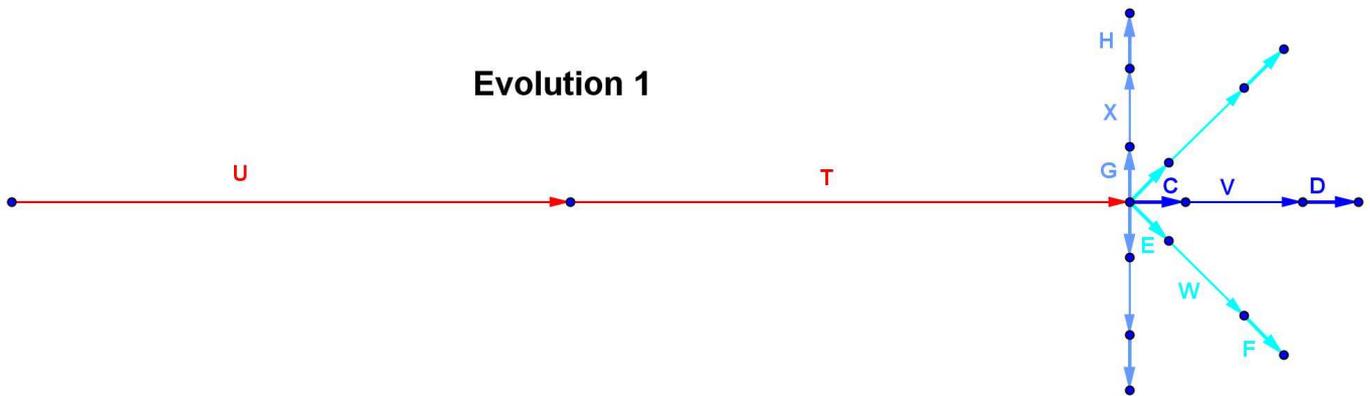
A → gY[+P]Y[-P]A

B → [+GXH][+EWF][CVD][-EWF][-GXH]

Départ : TB

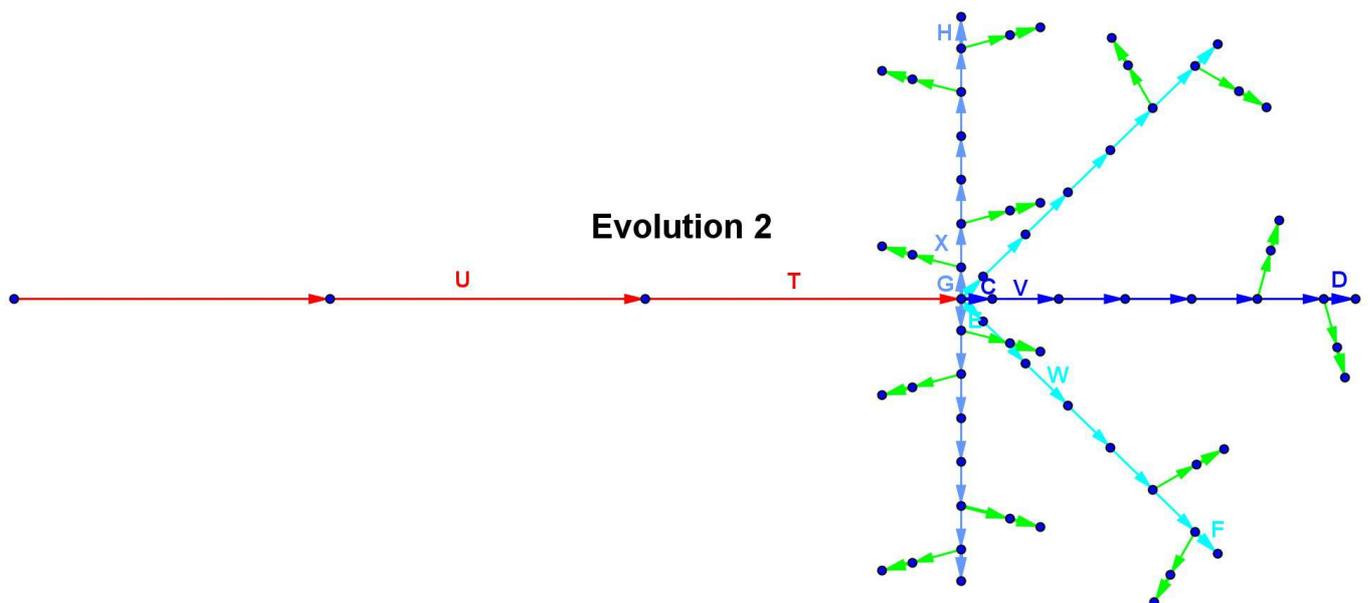
Nombre d'évolution : 5

Evolution 1

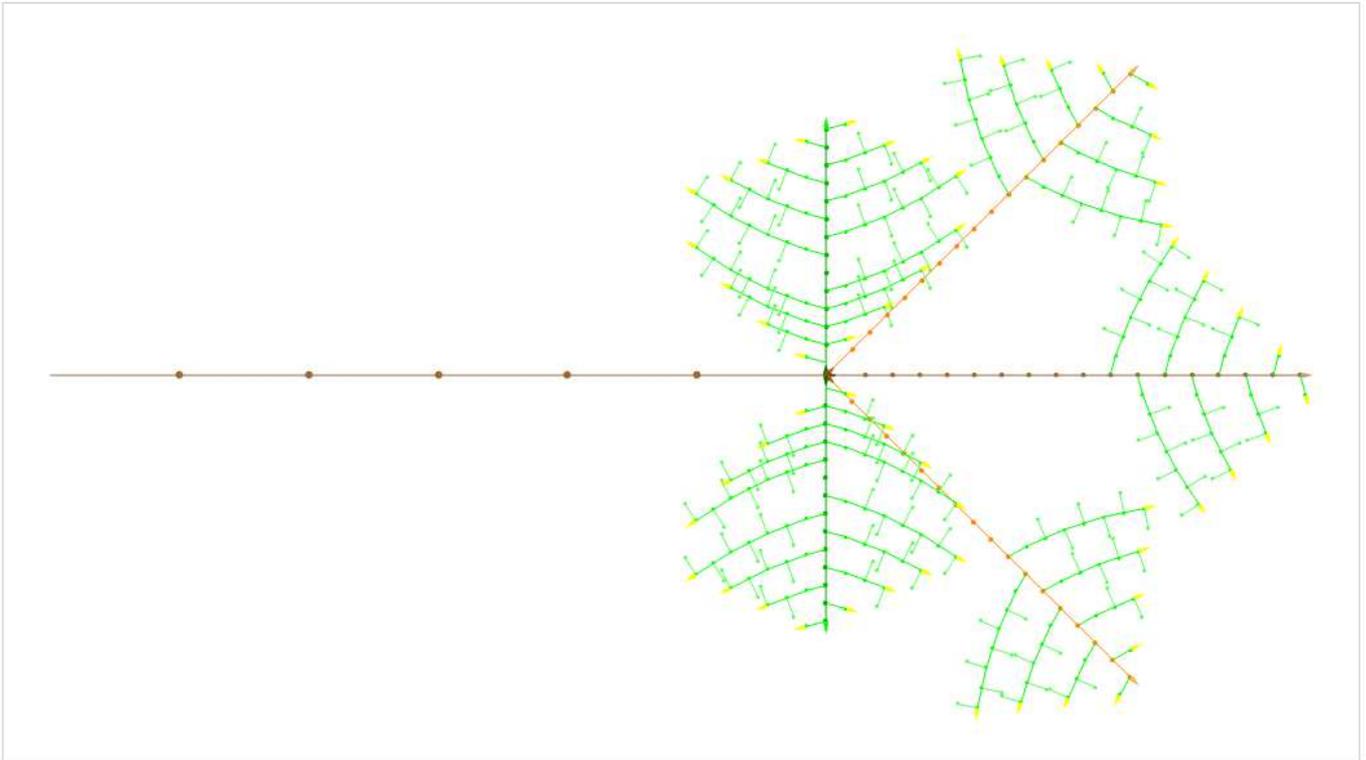


Évolution 1 du modèle ci-dessus

Evolution 2



Évolution 2 du modèle ci-dessus



Évolution 5 du modèle ci-dessus (mathematica)

6) Analyse du modèle et corrections

Nous pouvons constater que notre premier modèle doit être perfectionné pour être plus réel. Les corrections que nous avons apportées sont :

- 1) faire une évolution de plus
- 2) modifier l'angle de 6° (modèle 4.1)
- 3) modifier les longueurs des tiges (V, W, X P, Y)
- 4) voir si le modèle 2.2 ne serait pas plus approprié

Lors du congrès MATH.en.JEANS à l'Université d'Avignon, nous avons pu discuter avec notre chercheur.



Discussion avec notre chercheur lors du congrès d'Avignon

Les modifications que nous souhaitons ont été intégrées dans le programme et nous avons des « boutons » qui permettent de modifier rapidement les valeurs. Voici le modèle le plus réaliste que nous avons obtenu (les parties soulignées sont les modifications par rapport au précédent programme). Voir annexe 4 pour le programme.

Alphabet : {U,T,B,C,D,E,F,G,H,V,W,X,P,Y,Z,A}

U et T tiges de longueur 1, V une tige de 0,15, W une tige de 0,14, X une tige de 0,13, P et Y sont des tiges de longueur 0,1

L,M,N,O,B,C,D,E,F,G,H,Z et A sont des bourgeons,

+ correspond à une rotation de +50° et – une rotation de -50°

a correspond à une rotation de +75° et b à une rotation de -75°

d correspond à tourner de -10° et g correspond à tourner de +10°

Axiomes :

U → U

T → UT

V → V

C → C[aYZ]V[bYA]V

D → V[aYZ]V[bYA]D

W → W

E → E[aYZ]W[bYA]W

F → W[aYZ]W[bYA]F

X → X

G → G[aYZ]X[bYA]X

H → X[aYZ]X[bYA]H

Y → Y

P → P

Z → dY[+P]Y[-P]Z

A → gY[+P]Y[-P]A

B → [+L][CVD][-M]

L → [+N]EWF

M → [-O]EWF

N → GXH

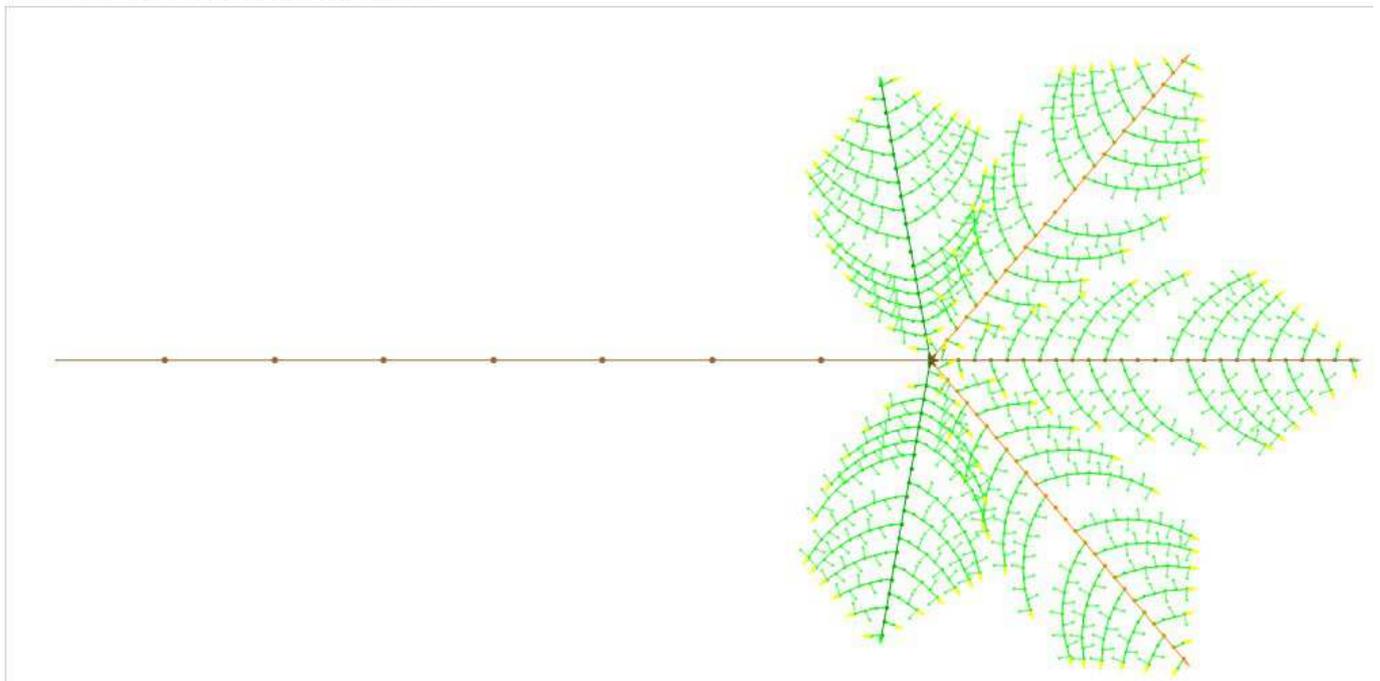
O → GXH

Départ : TB

Nombre d'évolution : 7

Nous obtenons :

l1 0.1 0.11 0.12 0.13 0.14 0.15 0.16
 l2 0.1 0.11 0.12 0.13 0.14 0.15 0.16
 h1 0.1 0.11 0.12 0.13 0.14 0.15 0.16 0.17 0.18 0.19 0.2 0.21 0.22 0.23 0.24 0.25
 α 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
 n 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Réglage de notre dernier modèle (mathematica)

Confrontation entre le modèle et la réalité



Superposition du modèle sur une feuille



Présentation lors des qualifications au concours Faites de la science à Marseille

II. Iterative structures in nature.

A. Modelisation of the “golden spiral” using Lindemayer systems

We built an approximation of the “golden spiral”(as can be seen in Appendix I and in the graph), which is the Fibonacci spiral. The golden spiral is the auto-similar bi-dimensional fractal whose ratio between two consecutive spin radii is the irrational number phi ($\varphi=1,61803\dots$). The modelisation was done using both the recurrence relation in the Fibonacci sequence, and the L-systems.

Therefore if we generally establish that:

A means: “draw a square whose side corresponds to a number of the Fibonacci sequence; change direction with 90° for the next square”

B means: “draw an arc of circle of 90° with the center in the corner of the square **A** (in which it is inscribed) and with the radius equal to the side of the square”

then we have the following L-system:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &\rightarrow \mathbf{BA} \end{aligned}$$

Note: After each iteration, the drawing start point at the centre of the arch will be moved automatically with 90° in the initially, arbitrarily chosen sense and with $f_{n+1} - f_n$, but only starting from the first iteration.

This being quite general, we choose an application: may the sense be anticlockwise. Hence, if we choose so, the rules become:

A: “draw a square (the n -th one) whose side corresponds to the number $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ of the Fibonacci sequence (where f_{n-2} and f_{n-1} are the numbers corresponding to the previous two squares); change direction with 90° in anticlockwise sense for the next square”

B: “draw an arc of circle of 90° with the center in the:

-higher right corner of its corresponding square for the first axiom ($n = f_n = 1$) and for the iterations given by the recurrence relation of the type $x_{n+1} = x_n + 4$, where, in this case the first n is 1.

-higher left corner of its corresponding square for the second axiom ($n = f_n = 2$) and for the iterations given by the recurrence relation of the type $x_{n+1} = x_n + 4$, where, in this case the first n is 2.

-lower left corner of its corresponding square for the iterations given by the recurrence relation of the type $x_{n+1} = x_n + 4$, where, in this case the first n is 3.

-lower right corner of its corresponding square for the iterations given by the recurrence relation of the type $x_{n+1} = x_n + 4$, where, in this case the first n is 4.

which results in:

1	A
1	B
2	B A
3	B A B
5	B A B B A
8	B A B B A B A B
13	B A B B A B A B B A B B A
21	B A B B A B A B B A B B A B B A B A B B A B A B

See Appendix II

If we take the length unit x , then the area of the obtained spiral is given by

$$\frac{4x^2 + \pi x^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + \dots)}{4}$$

B. The general formula for a schematic fern

Even though realistic ferns can only be created using the IFS (iterative function system-see the Barnsley fern), schematic ones can be created using Lindenmayer systems.

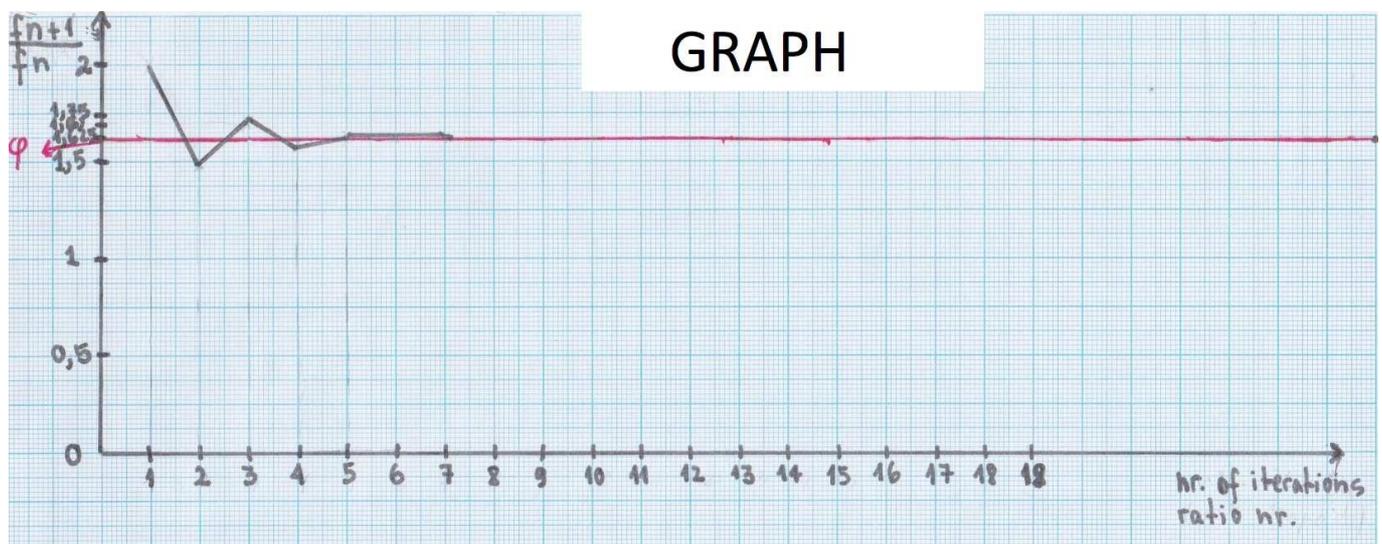
Therefore, by simply extending the system given at task 1.1, we obtain a plausible fern model. The system is:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow (n_1 \times B)[+A][-A](n_2 \times B)A \\ B &\rightarrow (n_3 \times B) \end{aligned}$$

Where A means “draw an oriented shoot” and B means “draw a branch/a leaf”, and the n -s are (not very big) natural numbers.

Note: The shoot gives the direction of the branch; + means to the right at a specified angle; - means to the left at the same specified angle (or not!); no sign means straight upwards.

C. Graph and appendices

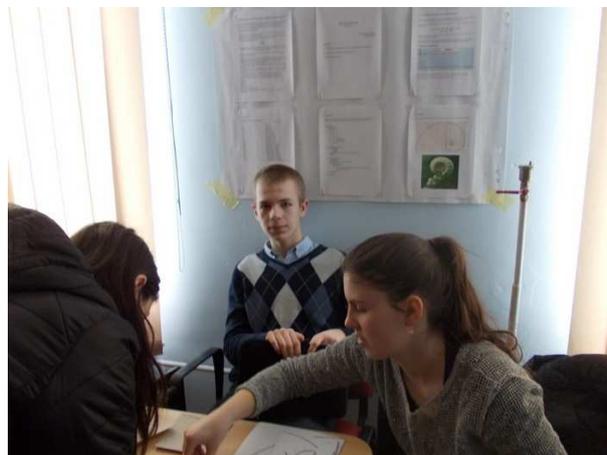


Graph of $r(n)$

Here n stands for the number of iterations, and for the ratio number at the same time.

If we take $r(n)$ for the ratio $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ where f_n and f_{n+1} are two consecutive numbers of the Fibonacci

sequence, then from this graph we notice that $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) = \phi$



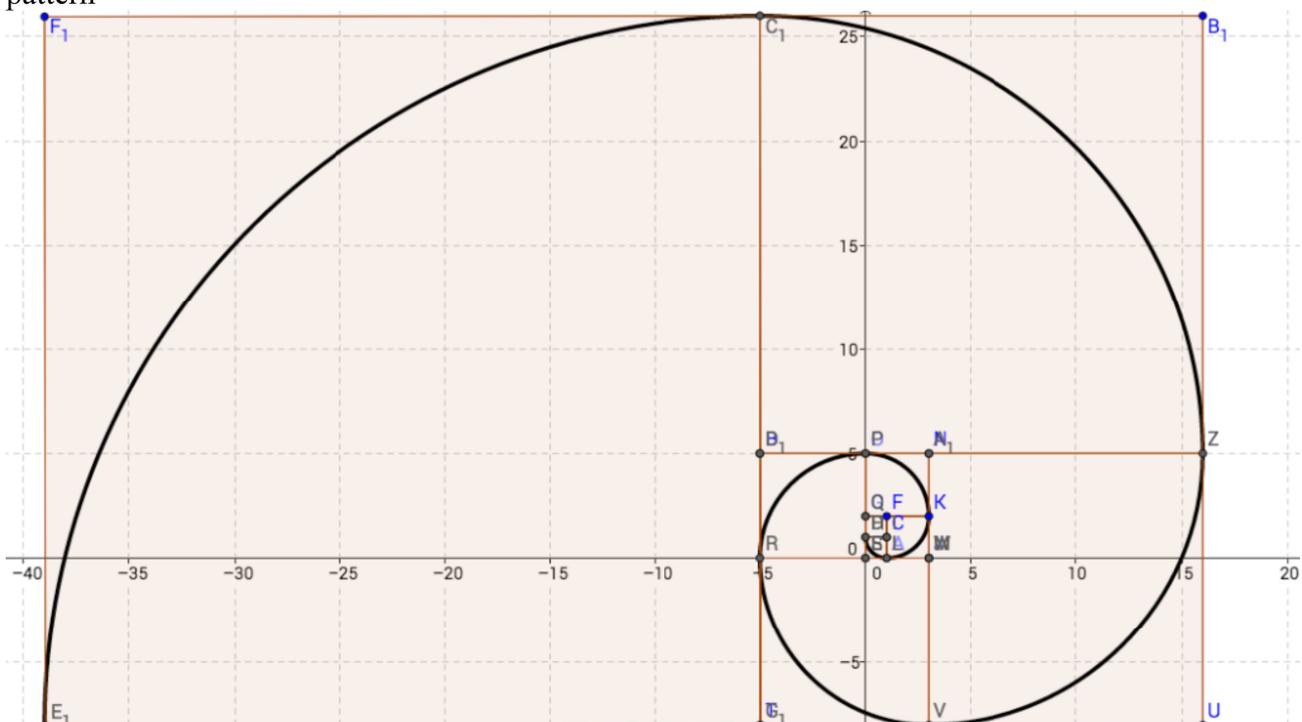
Présentation lors du « Forum of the math research projects » à Cluj-Napoca

Appendix I

Number of iterations (ratio number)	$r(n) = \frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	2:1=2
2	3:2=1,5
3	5:3=1,(6)
4	8:5=1,6
5	13:8=1,625
6	21:13=1,6153
7	34:21=1,6190
8	55:34=1,6176
9	89:55=1.6181
10	144:89=1.6179
11	233:144=1,6180(5)
12	377:233=1.61802
13	610:377=1.618037
14	987:610=1.618032
15	1597:987=1.618034
16	2584:1597=1.618033
17	4181:2584=1.618034
18	6765:4181=1.618033
19	10946:6765=1.618033 $\cong \varphi$

Appendix III

A picture of the Fibonacci spiral obtained using Geogebra and a fern shoot displaying a Golden Spiral pattern



Appendix II

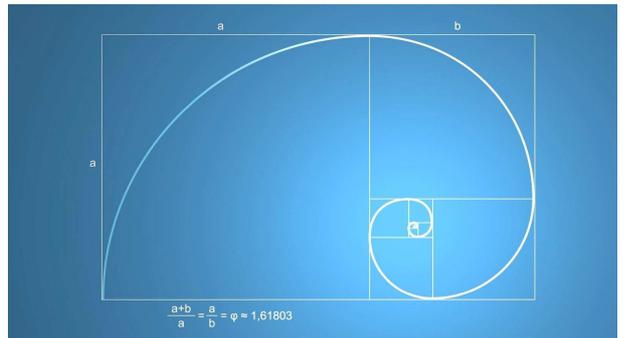
Here we have a Python programme with the execution instruction in the end. Using the Turtle building instructions, this programme can build the Fibonacci spiral using squares.

```
import turtle
>>>def _fibonacci(n):
    fib1 = 0; fib2 = 1
    if n==0:
        return fib1
    elif n == 1:
        return fib2
    else:
        for i in range(n-1):
            fib = fib1+fib2
            fib1, fib2=fib2, fib
        return fib

>>>def _square(t, seg, size, fib):
    for i in range(seg):
        t.fd(size)
        t.left(90)
    t.write(fib)# write the current Fibonacci next to the square
    t.fd(size)
```

```
>>>def draw_spiral(size=10):
    t = turtle.Turtle()
    seg = 3 # set to 5 segments after first pass
    for i in range(size):
        fib = _fibonacci(i)
        if (fib>0):
            size = fib * 10 # a multiplier to give squares a reasonable size
            _square(t, seg, size, fib):
            seg = 5
    turtle.done()

>>>draw_spiral()
```



Annexe 4 – Programme Mathematica des modèles de Briançon

```
modele = {"U" -> "U", "T" -> "UT", "V" -> "V", "C" -> "C[aYZ]V[bYA]V", "D" -> "V[aYZ]V[bYA]D", "W" -> "W", "E" -> "E[aYZ]W[bYA]W", "F" -> "W[aYZ]W[bYA]F",  
"X" -> "X", "G" -> "G[aYZ]X[bYA]", "H" -> "X[aYZ]X[bYA]H", "Y" -> "Y", "P" -> "P", "Z" -> "dY[+P]Y[-P]Z", "A" -> "gY[+P]Y[-P]A",  
"B" -> "[+GXH][+EWF][CVD][-EWF][-GXH]";  
  
graph = {"U" -> {Brown, Disk[{1, 0}, 0.03], Line[{{0, 0}, {1, 0}]}}, "T" -> {Brown, Disk[{1, 0}, 0.03], Line[{{0, 0}, {1, 0}]}},  
"V" -> {Brown, Disk[{0.21, 0}, 0.02], Line[{{0, 0}, {0.21, 0}]}}, "W" -> {Orange, Disk[{0.19, 0}, 0.02], Line[{{0, 0}, {0.19, 0}]}},  
"X" -> {Darker[Green], Disk[{0.14, 0}, 0.02], Line[{{0, 0}, {0.14, 0}]}}, "Y" -> {Green, Disk[{0.16, 0}, 0.015], Line[{{0, 0}, {0.16, 0}]}},  
"E" -> {Lighter[Green], Disk[{0.16, 0}, 0.015], Line[{{0, 0}, {0.16, 0}]}}, "B" -> {Green, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"C" -> {Darker[Brown], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}}, "D" -> {Lighter[Brown],  
Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"E" -> {Darker[Orange], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"F" -> {Lighter[Orange], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"G" -> {Darker[Darker[Green]], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"H" -> {Green, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"Z" -> {Yellow, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"A" -> {Yellow, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}}, "+" -> Angle[45 Degree], "-" -> Angle[-45 Degree],  
"a" -> Angle[75 Degree], "b" -> Angle[-75 Degree], "d" -> Angle[-6 Degree], "g" -> Angle[6 Degree];
```

Programme Mathématique pour le modèle de la page 13

```
modele2 = {"U" -> "U", "T" -> "UT", "V" -> "V", "C" -> "C[aYZ]V[aYZ]V", "D" -> "V[aYZ]V[bYA]D", "W" -> "W", "E" -> "E[aYZ]W[aYZ]W", "F" -> "W[aYZ]W[bYA]F",  
"X" -> "X", "G" -> "G[aYZ]X[bYA]", "H" -> "X[aYZ]X[bYA]H", "Y" -> "Y", "P" -> "P", "Z" -> "dY[+P]Y[-P]Z", "A" -> "gY[+P]Y[-P]A",  
"B" -> "[+L][CVD][-M]", "L" -> "[+N]EWF", "M" -> "[-O]EWF", "N" -> "GXH", "O" -> "GXH";  
  
graph2[ $\alpha$ , l1, l2, lt1] := {"U" -> {Brown, Disk[{1, 0}, 0.03], Line[{{0, 0}, {1, 0}]}}, "T" -> {Brown, Disk[{1, 0}, 0.03], Line[{{0, 0}, {1, 0}]}},  
"V" -> {Brown, Disk[{lt1, 0}, 0.02], Line[{{0, 0}, {lt1, 0}]}}, "W" -> {Orange, Disk[{lt1 - 0.01, 0}, 0.02], Line[{{0, 0}, {lt1 - 0.01, 0}]}},  
"X" -> {Darker[Green], Disk[{lt1 - 0.02, 0}, 0.02], Line[{{0, 0}, {lt1 - 0.02, 0}]}}, "Y" -> {Green, Disk[{l2, 0}, 0.015], Line[{{0, 0}, {l2, 0}]}},  
"E" -> {Lighter[Green], Disk[{l1, 0}, 0.015], Line[{{0, 0}, {l1, 0}]}}, "B" -> {Green, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"C" -> {Darker[Brown], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}}, "D" -> {Lighter[Brown],  
Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"E" -> {Darker[Orange], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"F" -> {Lighter[Orange], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"G" -> {Darker[Darker[Green]], Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"H" -> {Green, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"Z" -> {Yellow, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}},  
"A" -> {Yellow, Polygon[{{0, 0}, {0.02, 0.02}, {0.1, 0}, {0.02, -0.02}, {0, 0}]}}, "+" -> Angle[50 Degree], "-" -> Angle[-50 Degree],  
"a" -> Angle[75 Degree], "b" -> Angle[-75 Degree], "d" -> Angle[- $\alpha$  Degree], "g" -> Angle[ $\alpha$  Degree];
```

Programme Mathématique pour le modèle des pages 14 et 15

Notes d'edition

- (1) Un L système est une grammaire formelle générative et récursive permettant de modéliser le processus d'évolution de certaines espèces animales et végétales
- (2) Cette phrase n'est pas très claire . Le “ mélange “ des nervures pourrait être explicité.