Le mirage prend l'eau

Étude de la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu hétérogène

Année 2008 – 2009

Charlotte TUGAYE et François BOSQUET élèves de classe préparatoire à l'enseignement supérieur

Encadrés par M. Excoffon et M. Tilman

Établissement : Ecole des Pupilles de l'air 749 (Montbonnot-Saint-Martin)

Chercheur : Stéphane Labbé (Université J. Fourier, Grenoble)

Présentation du sujet :

Nous avons étudié la trajectoire d'un rayon lumineux dans une bassine comportant un mélange de deux liquides de densités différentes. En discrétisant, nous avons conjecturé que la trajectoire du rayon n'était pas rectiligne. Par la suite, les lois de Descartes nous ont permis d'établir une équation différentielle modélisant la trajectoire du rayon. Nous retrouvons l'équation d'une parabole dans l'exemple que nous avons choisi de traiter dans ce texte.

Prenons une bassine qui contient deux liquides d'indices de réfraction différents et considérons un rayon lumineux arrivant dans cette bassine. Quelle est alors la trajectoire d'un rayon lumineux qui se propage à travers la bassine ?
Nous obtenons finalement quatre milieux : trois milieux homogènes l'air et les liquides 1 et 2 (1) ainsi qu'un milieu où l'indice varie linéairement (2). Nous avons choisis pour étudier la trajectoire du rayon, de discrétiser le problème, c'est à dire de diviser ce dernier milieu en k petites couches homogènes de même hauteurs h afin de pouvoir utiliser la loi de Descartes pour calculer la trajectoire des rayons d'une couche à l'autre. Cette hauteur h varie en conservant la hauteur de l'empilement constante ; ainsi, quand k tend vers l'infini, h tend vers 0.

Nous connaissons déjà la loi de Descartes qui donne :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

où n_1 et n_2 sont les indices des deux milieux et i_1 et i_2 les angles entre le rayon lumineux et la normale à la surface des couches dans chacune des couches.

Nous obtenons donc une première réfraction lorsque le rayon lumineux passe de l'air au liquide 1. Mais que se passe-t-il lorsque le rayon arrive à la limite entre le liquide 1 et le liquide 2 (3) ?

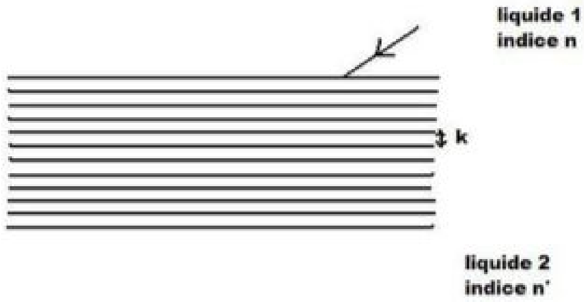


Illustration 1: division du milieu hétérogène en k couches (4)

La hauteur *h* entre chaque couche est la même(5) et l'indice *n* de chaque couche varie à chaque passage de couche selon le graphique ci-dessous. La loi de Descartes nous montre que le rayon se courbe jusqu'à arriver à un angle limite, à condition bien sûr que $n_1 < n_0$ (6) (constaté numériquement en estimant la limite de la suite des angles de réfraction). Que se passe-t-il donc après cet angle limite ? Utilisons un autre moyen que la loi de Descartes(7) et cherchons une relation entre « l'altitude » *z* d'une couche et son indice *n*. Commençons par placer la couche ci-dessus dans un repère.

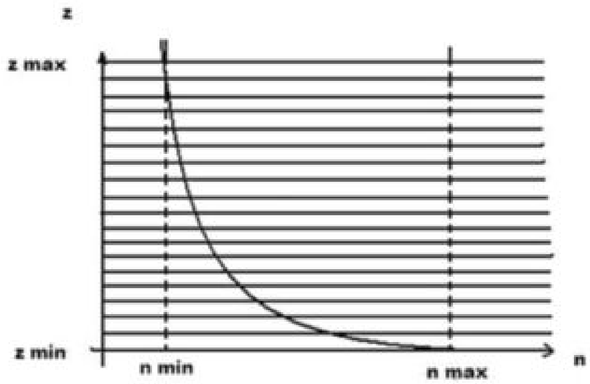


Illustration 2: altitude z en fonction de la couche n (8)

Faisons alors varier la hauteur sous la forme $z = an^2 + b$ (9)

On obtient alors : $z = z_0, n = n_{max}$ => $z_0 = an_{max}^2 + b$

$z = z_{max}, n = n_{min}$ => $z_{max} = an_{min}^2 + b$

Donc : $z_0 - z_{max} = a(n_{max}^2 - n_{min}^2)$ => $a = \frac{z_0 - z_{max}}{n_{max}^2 - n_{min}^2}$

Et : $z_0 = an_{max}^2 + b$ => $b = \frac{z_0 - z_{max}}{n_{max}^2 - n_{min}^2} n_{max}^2$

On a donc finalement = $z^2 = an^2 + b$ (10)

Cherchons maintenant quelle va être la trajectoire du rayon dans cette couche, et utilisons la loi de Descartes. Remarquons dans un premier temps que pour tout entier *k* :

$$n_1 \sin(i_1) = n_k \sin(i_k) = A \quad \text{avec } A \text{ une constante}$$

En effet, comme les angles alternes internes sont égaux, on a :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) = \ldots = n_k \sin(i_k)$$

Or, le nombre de couches tendant vers l'infini et h vers 0, nous avons $n_k \sin(i_k)$ qui est constant le long du rayon. Représentons maintenant l'altitude z parcourue par le rayon en fonction de son avancée x dans la couche.

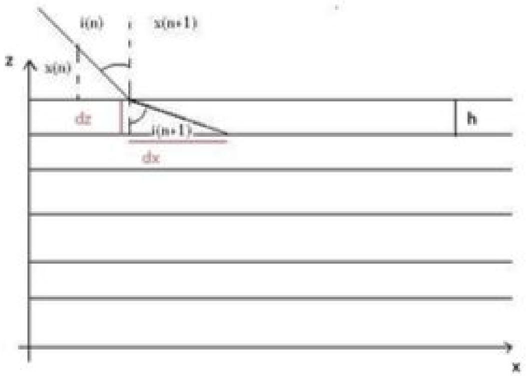


Illustration 3: trajectoire du rayon en fonction de son altitude et du nombre de couches n traversées

On peut alors remarquer que pour tout angle i_k , on a :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\tan(i_k)}=\frac{\cos(i_k)}{\sin(i_k)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{\cos^2(i_k)}{\sin^2(i_k)}$$

Or, $\cos^2(i_k)=1-\sin^2(i_k)$ donc :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{1}{\sin^2(i_k)}-1$$

On a de plus : $n_1\sin(i_1)=n_k\sin(i_k)=A$ donc (11)

$$\frac{1}{\sin^2(i_k)}=\frac{n_{i_k}^2}{n_1^2\sin^2(i_1)}=\frac{n_k^2}{A^2}$$

D'où : $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{n_k^2}{A^2}-1$ (12). Or, on a aussi vu que : $z^2=an_k^2+b$, d'où finalement :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{z-b}{an_1^2\sin^2(i_1)}-1$$

Dérivons maintenant cette expression : (13)

$$2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{1}{an_1^2\sin^2(i_1)}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

D'où :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{2\mathrm{an}_1^2\sin^2(i_1)}=C \quad \text{avec } C \text{ une constante.}$$

On a alors : (14)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\mathrm{an}_1^2\sin^2(i_1)}x+C$$

Or pour x=0 on a : $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\tan(i_1)}$, donc :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\mathrm{an}_1^2\sin^2(i_1)}x+\frac{1}{\tan(i_1)}$$

D'où par une deuxième intégration :

$$z=(\frac{1}{4an_1^2\sin^2(i_1)})x^2+\frac{1}{\tan(i_1)}x+C$$

Or pour $z=z_{max}$, on a $x=0$ (15).

Donc finalement

$$z=(\frac{1}{4an_1^2\sin^2(i_1)})x^2+\frac{1}{\tan(i_1)}x+z_{max}$$

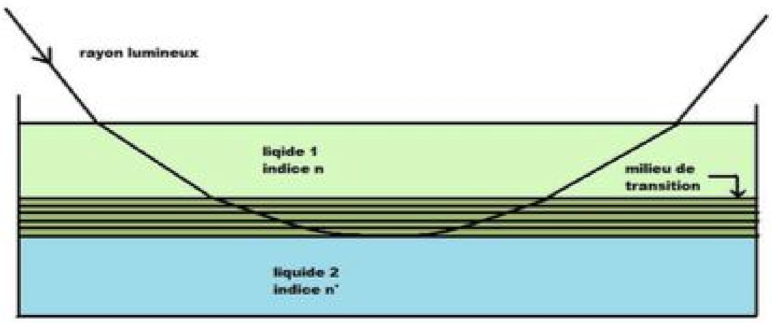
On obtient donc l'équation d'une parabole.

On peut donc en conclure que le rayon une fois arrivé à un angle limite (16) va remonter et ressortir de la bassine.

On retrouve donc le phénomène du mirage, il y a analogie entre la différence de température du mirage et la différence de milieu étudiée dans la bassine. En effet, l'indice de réfraction de l'air varie avec la température. Ce phénomène est par exemple visible au dessus d'une plaque chaude, quand les images se déforment sous l'effet de la chaleur.

Nous aurions également pu étudier le même phénomène en créant dans la bassine une différence de température .

Illustration 4: trajectoire du rayon lumineux dans la bassine (17)



Notes d'édition

(1) Le liquide 1 sera au-dessus du liquide 2 et va être frappé en premier.

(2) Il s'agit d'un milieu très mince qui serait à l'interface entre les deux milieux homogènes.
En réalité, il faudrait dire « un milieu où l'indice varie continûment ». Il est réaliste de penser que l'indice ne passe pas brusquement d'une valeur à une autre, mais qu'il va passer par toutes les valeurs entre les deux sur une petite couche. Dans l'article on ne va pas supposer que l'indice varie linéairement (comme une droite) mais qu'il suit une fonction quadratique (une parabole).

(3) En réalité, lorsque le rayon lumineux arrive à la limite entre le liquide 1 et le liquide 2, le rayon va aussi subir une réfraction suivant la loi de Descartes. Mais il y a des cas où la loi de Descartes ne peut pas s'appliquer: le sinus est toujours inférieur à 1, mais si par hasard $n_1\sin(i_1)/n_2>1$ la loi de Descartes imposerait que $\sin(i_2)$ soit strictement supérieur à 1, ce qui n'est pas possible. Et pourtant, le rayon va bien quelque part...
Le but de l'article est de comprendre ce qui se passe au niveau de cette interface.

(4) Pour rester cohérent avec l'introduction, le liquide 1 devrait avoir un indice n_1 et le liquide 2 un indice n_2 . De plus, c'est h (et non k) qui représente la hauteur d'une petite couche. *k* est le nombre de couches.

(5) Il faut comprendre « est constante »

(6) Pour rester cohérent avec l'introduction, il faudrait écrire $n_2<n_1$.

(7) Que le lecteur ne s'inquiète pas, c'est encore la loi de Descartes qui va être utilisée !

(8) *n* n'est pas la couche, mais l'indice.
De plus, pour rester cohérent avec l'introduction, *n* min devrait être remplacé par n_2 et n max par n_1

(9) Ce choix d'un indice qui varie comme une parabole en fonction de l'altitude permet de mener à bien les

calculs, mais mériterait quelque justification.
(10) Il faut comprendre : avec *a* et *b* donnés par les formules ci-dessus.
(11) La toute dernière égalité est inutile pour la suite.
(12) Il vaut mieux écrire « $(dz/dx)^2 = (n_k/(n_1 \sin(i_1)))^2 - 1$ ». C'est cela qui sert dans la suite.
(13) Il y a une petite subtilité ici. Jusque là, nous avons considéré que *dz* et *dx* étaient des petites longueurs (voir l'illustration 3), qui dépendaient implicitement de *k*, le numéro de la couche. Et maintenant nous faisons comme si dz/dx était la dérivée de z par rapport à *x*... c'est fort ! Mais cela est VRAI lorsqu'on prend des couches extrêmement fines (*h* tend vers 0). On peut démontrer qu'alors dz/dx converge vers la dérivée de z par rapport à x (et c'est même la définition de la dérivée). Désormais, donc, on considère z comme une fonction de x, et on mène des calculs d'analyse.
(14) Ici C est une autre constante. C'est aussi le cas pour la formule qui arrive deux crans plus tard.
(15) Ceci est un choix des auteurs sans conséquence. Cela revient à placer l'origine du repère au premier point d'incidence du rayon sur la zone d'interface.
(16) Il faut comprendre « à une direction horizontale ».
(17) Encore une fois, pour être cohérent avec l'introduction, il faudrait mettre n_1 à la place de *n* et n_2 à la place de n'.
De plus, on voit sur l'illustration que le rayon atteint son point le plus bas exactement au bas de la couche intermédiaire étudié. Mais cela n'est pas forcément le cas: le rayon peut atteindre son point le plus bas à n'importe quel niveau dans la couche intermédiaire.