Mille-pattes comptables

et Dactylonomie Cent-pieds

Année 2019 – 2020

Elèves : BARKALLIL Yzza, EL OUAZZANI Ibrahim, GOETTMANN Jules, LISSANE EDDINE Zeyneb, CHAKROUN Sophia respectivement 4 élèves de classe de 3ème et 1 élève de 5ème

Encadrés par : M. ASTRUC Lionel et Mme RAVELEAU PICOULET Noémie

Etablissement : Lycée International Français Louis Massignon (Casablanca, Maroc)

Chercheuse : Marion le Gonidec, université de la Réunion

1. Présentation du sujet :

A nous collégiens, affiliés à l'association MATh.en.JEANS, nous a été confiée une lourde tâche : aider des mille-pattes à apprendre à compter. Mais eux, ne disposent pas des mêmes facultés que nous. Notre but au travers de ce sujet sera donc de mettre au point des systèmes qui leur permettront de :

- Compter
- Ordonner des nombres,
- Utiliser les 4 opérations : "Division, Soustraction, Multiplication et Addition" à l'aide des méthodes trouvées.

Ainsi n'existera plus en ce monde mille-pattes ne sachant compter et tous pourront profiter dans la joie et la gaieté de cœur de l'appas des nombres.

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus :

Tout au long de cette année de recherche, nous avons pu :

- Découvrir quelques façons de compter à travers le monde
- Compter jusqu'à 100 avec une seule main
- Comprendre le fonctionnement de 2 systèmes : Croisé/Décroisé, Plié/Tendu,

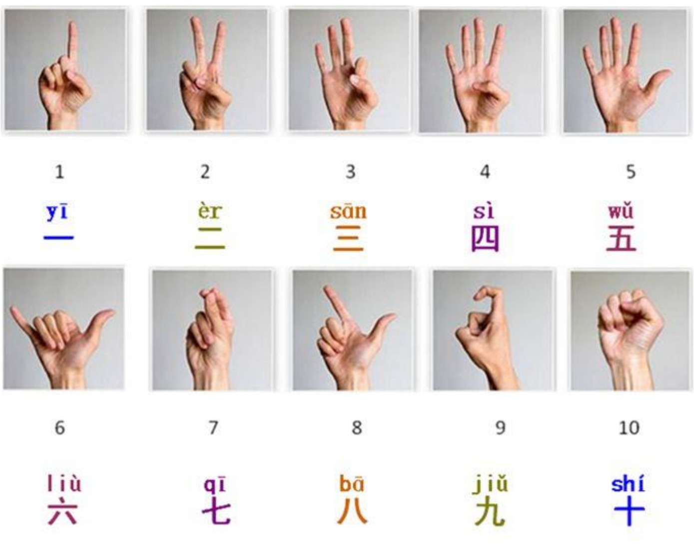
- Trouver jusqu'à combien un humain peut compter avec ses deux mains à l'aide de méthodes définies
- Découvrir une formule qui permet de calculer le nombre de possibilités en suivant la méthode pliée/tendue et avec un certain nombre de doigts pliés, que voici :
  - $(n\,x\,) = \frac{n!}{x!*(n-x)!}$
- Organiser les combinaisons pliées/tendues grâce au système binaire
- Additionner, soustraire, multiplier et diviser avec le système binaire et donc avec la méthode pliée/tendue
- Trouver une relation entre la suite de Fibonacci et la méthode croisée/décroisée

3. Texte de l'article :

I. *Différentes façons de compter à travers le monde :*

Avant d'essayer d'établir notre propre système pour compter, nous avons étudié ceux utilisés à travers le monde pour ensuite les lister. Parmi eux la langue des signes française (LSF), et la méthode chinoise.

On constate que la langue des signes française nous permet déjà de compter jusqu'à des nombres bien plus élevés que 10.



Méthode chinoise

Méthode de la Langue des Signes Française

II. <u>*Compter jusqu'à 100*</u> :

A partir de cette base nous avons essayé d'aller jusqu'à 100 avec une seule de nos mains.

Des images 1 à 9, nous fonctionnons simplement par un système de pli de gauche à droite puis de droite à gauche, c'est à partir de l'image numéro 10 que les choses deviennent plus intéressantes, effectivement nous employons une méthode issue de notre imagination qui repose sur l'utilisation des 4 faces de nos phalanges (droite, gauche, avant, arrière) :

Elles sont au nombre de 3 par doigt à l'exception des pouces qui n'en ont que 2. Cette méthode nous permet de compter jusqu'à 56 :

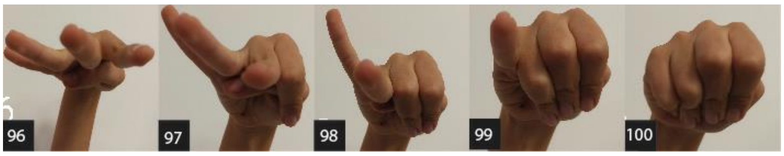
$Nombre\ de\ Phalanges * 4 = 14 * 4 = 56$;

On est ensuite passé à une seconde méthode, qui fonctionne de la manière suivante :

Chaque doigt dispose de 3 niveaux de pli différent, ainsi nous avons 15 nouvelles combinaisons : $3 * 5 = 15$

Deux systèmes très simples, ont servi de complément :

- Le premier : on change juste l'orientation des mains, tout en restant sur une méthode "classique"



- Le second : au lieu de mettre la main vers l'avant, on la retourne

(1)

III. Le fonctionnement de la méthode Pliée/Tendue :

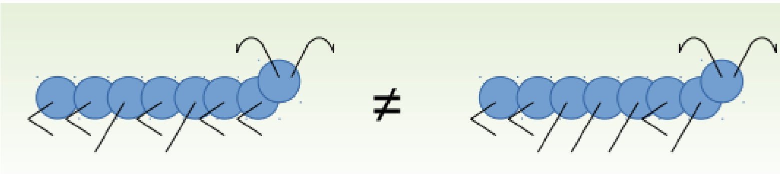
Maintenant que nous avons examiné des systèmes et des méthodes plutôt aisés et accessibles, on va se pencher sur un de nos sujets d'études principaux, simple en apparence mais assez complexe lorsqu'on s'y plonge. Il s'agit de la méthode Pliée/Tendue.

Comme son nom l'indique, elle repose sur le fait de plier ou de tendre chacun de ses doigts. Pour nous, humains, cela donne :

Une possibilité :  une autre :  et une troisième : 

Comme vous le constatez, on peut plier chacun de nos doigts et les associer à un ou plusieurs autres doigts, pour former plusieurs configurations.

Pour nos mille-pattes, voici quelques combinaisons possibles :



Il est important de noter que les Mille-Pattes ne comptent que sur leur côté droit.

IV. *Jusqu'à combien un humain peut-il compter en utilisant la méthode Pliée/ Tendue combinée à la méthode des phalanges ?*

Avant de s'intéresser à nos amis les mille-p attes, on propose de revenir un instant à nous, humains, dotés de 2 mains, munies de 5 doigts chacune.

Nous avons dans un premier temps noté à la main, toutes les possibilités avec 10 doigts.

Le tableau ci-dessous, montre le nombre de possibilités pour n, le nombre de doigt(s) plié(s) avec $0 < n \leq 10$:

10 doigts pliés	1 possibilité
9 doigts pliés	10 possibilités
8 doigts pliés	45 possibilités
7 doigts pliés	120 possibilités
6 doigts pliés	210 possibilités
5 doigts pliés	252 possibilités
4 doigts pliés	210 possibilités
3 doigts pliés	120 possibilités
2 doigts pliés	45 possibilités
1 doigt plié	10 possibilités
0 doigt plié	1 possibilité

On a couplé cela avec une méthode des phalanges, qui contrairement à celle expliquée auparavant ne prend pas en compte les pouces, et repose non pas sur les 4 faces, mais, sur l'association de nos différentes phalanges les unes avec les autres :

Cela nous donne :

- 23 + 22 + 21 + ... + 3 + 2 + 1 + 23 = 299 avec la deuxième méthode des phalanges
- $1 + 2(10 + 45 + 120 + 210) + 252 = 1023$ en appliquant la méthode Pliée/Tendue

Au total cela fait 1023 + 299 = 1322.

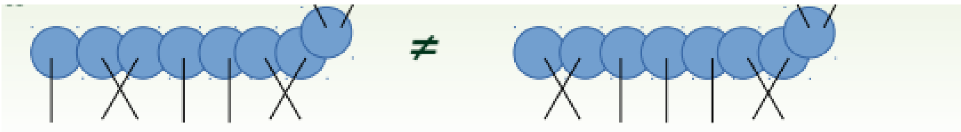
La combinaison de ces deux méthodes permet d'obtenir un résultat plus probant que celui de la méthode standard.

V. *Le fonctionnement de la méthode Croisée/Décroisée :*

La méthode Croisée/Décroisée est la seconde grande partie de notre sujet.

Comme la Pliée/Tendue, elle est très simple à comprendre mais recèle bien des secrets.

- Principe de la méthode :



Comme pour la méthode exposée précédemment, le nom présente bien le fonctionnement de ce système.

Chaque croisement et association entre plusieurs croisements de pattes représentent une possibilité. Cependant, on doit respecter les règles suivantes :

- Seules deux pattes voisines peuvent se croiser,
- Seules les pattes sur le côté droit sont prises en considération,
- Une patte ne peut se croiser qu'avec une autre à la fois,
- 2 configurations différentes donnent des nombres différents.

VI. *La formule générale pour la méthode Pliée/Tendue :*

A partir de la méthode Pliée/Tendue, nous avons cherché à trouver une formule générale qui nous permettrait de calculer assez facilement le nombre de configurations possibles.

Ainsi, nous avons au début, compté à la main le nombre de configurations possibles en représentant les doigts pliés par la lettre P et les doigts tendus par la lettre T.

Ci-dessous, toutes les configurations possibles pour 2 doigts pliés parmi 5 :

PPTTT PTPTT PTTPT PTTTP	TPPTT TPTPT TPTTP	TTPPT TTPTP	TTTPP

Résultat : 10 combinaisons.

A partir de l'exemple ci-dessus, nous avons cherché à établir la formule générale.

Rappelons, qu'avec cette méthode, chaque doigt ne peut avoir que deux états différents (plié ou tendu).

Tout d'abord, nous avons remarqué après plusieurs essais, qu'une fois que les doigts pliés sont placés, les doigts tendus sont, par défaut placés aux emplacements restants.

Pour que soit ce plus clair, nous allons utiliser un schéma :

1	2	3	4	5

Plaçons un premier doigt plié, nous avons donc le choix entre un de ces 5 emplacements.

	P			
1	2	3	4	5

Ensuite, plaçons un deuxième doigt plié, cette fois, nous avons le choix entre un des 4 emplacements restants.

	P			P
1	2	3	4	5

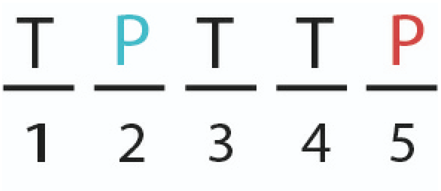
Maintenant que les doigts pliés sont en places, les trois autres doigts sont obligatoirement tendus.

T	P	T	T	P
1	2	3	4	5

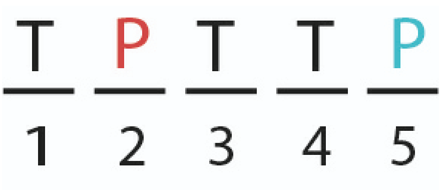
Nous avons également remarqué qu'il fallait prendre en considération les permutations.

Les permutations c'est l'idée de réarrangement ou d'inversion. C'est-à-dire que l'on peut interchanger la position des doigts pliés, sans pour autant changer la combinaison.

Nous allons encore une fois avoir recours à des schémas pour que ce soit plus facile à comprendre. Reprenons la même combinaison que tout à l'heure, mais cette fois ci, nous allons mettre chaque P d'une couleur différente.



Et si, maintenant, nous placions le P bleu au 5ème emplacement et le P rouge au 2ème emplacement.



Le résultat est le même, mais nous avons 2 combinaisons possibles pour ce même résultat. C'est cela qu'on appelle permutations.

Enfin, nous avons besoin du nombre total de possibilités avec 5 doigts, peu importe le nombre de doigts pliés et le nombre de doigts tendus.

Nous arrivons donc à la formule suivante :

$$\frac{5!}{2! * (5-2)!}$$

- <u>Définition :</u>

En mathématiques, la factorielle d'un nombre correspond au produit des nombres entiers positifs compris entre 1 et ce nombre.

- <u>Démonstration de la formule :</u>

Comme expliqué précédemment, nous avons trois paramètres à prendre en compte :

- Le nombre total de possibilités
- Les permutations
- Le fait qu'une fois que les doigts pliés sont placés, les doigts tendus le sont également par défaut

Revenons-en à notre formule :

$$\frac{5!}{2! * (5-2)!} = \frac{5!}{2! * 3!}$$

Commençons par le numérateur : On retrouve le nombre total de possibilités, soit :

$5!$, autrement dit $5 * 4 * 3 * 2 * 1$.

Ensuite, le dénominateur : on retrouve $2!$ et $3!$, mais avant d'aller plus loin, développons le calcul :

$$\frac{5!}{2! * 3!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(2 * 1) * (3 * 2 * 1)}$$

Le $3!$ permet d'appliquer le premier paramètre : à partir du moment où nos doigts pliés sont en place, les doigts tendus prennent automatiquement position. Et nous remarquons que nous n'avons pas besoin de prendre en considération le 3, le 2 et le 1, dans le calcul du nombre total de possibilités.

Voici le calcul une fois simplifié :

$$\frac{5 * 4 * \cancel{3} * \cancel{2} * \cancel{1}}{(2 * 1) * (\cancel{3} * \cancel{2} * \cancel{1})} = \frac{5 * 4}{2 * 1} = \frac{20}{2}$$

Nous avons donc 20 combinaisons possibles en prenant en considération les permutations.

Enfin, le $2!$ permet de retirer les permutations.

Ainsi, $\frac{20}{2} = 10$

Donc, avec 2 doigts pliés parmi 5, il y a 10 combinaisons différentes possibles.

Pour finir, en mathématiques, 2 parmi 5, s'écrit sous cette forme : $(5 \;\; 2)$.

- <u>La formule générale :</u>

Après cela, pour passer à une formule générale, définissons 2 variables :

- n pour le nombre de doigts total
- x pour le nombre de doigts pliés

Ensuite remplaçons les valeurs par ces variables.

On obtient donc la formule générale : (2)

$$(n \;\; x) = \frac{n!}{x! * (n - x)!}$$

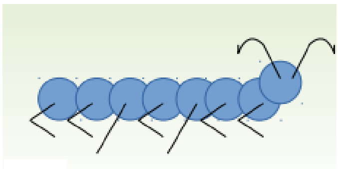
VII. *Les combinaisons Pliées/Tendues et le système binaire :*

Précédemment, nous avons représenté la méthode Pliée/Tendue via 2 lettres : P et T qui illustrent les 2 états que peuvent prendre les doigts. C'est bien cette notion de 2 états que partage la méthode Pliée/Tendue avec le système binaire. Ce qui nous conduit à l'utiliser pour ordonner celle-ci.

Effectivement à l'aide des puissances de 2, il est aisé de donner un sens à chaque doigt plié ou tendu :

$$1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 + 0 * 2^4 = 1 + 4 + 8 = 13$$

Appliquons le même procédé pour les mille-pattes :



$2^0\ 2^1\ 2^2\ 2^3\ 2^4\ 2^5\ 2^6$

$$1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2 + 1 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 1 + 2 + 8 + 32 + 64 = 107$$

En binaire : 1101011 (3)

VIII. *Calculer avec la méthode Pliée/Tendue :*

Ayant choisi le système binaire pour ordonner les combinaisons Pliées/Tendues, il parait évident qu'il faut utiliser le système binaire pour pouvoir calculer avec cette méthode.

- ## L’addition :

L’addition dans le système binaire et dans le système décimal sont similaires. Cependant on n’utilise pas la totalité des chiffres (1, 2, 3 ,4, 5, 6, 7, 8, 9, 0), mais seulement 0 et 1.

Les retenues dans le système binaire ont également la même valeur que celles du système décimal.

Voici les règles de calcul dans le système binaire :

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$ avec une retenue de 1

- ## La multiplication :

Là encore, les règles de multiplication en binaire sont les mêmes qu’en décimal :

- Lorsqu’on multiplie un nombre par 1, on obtient le même nombre
- Lorsqu’on multiplie un nombre par 0, on obtient 0

- ## La soustraction :

Les règles de calcul sont similaires à celles du système décimal. Les seules différences sont la base utilisée ainsi que la valeur des emprunts.

Les emprunts dans le système décimal :

- L’emprunt bleu vaut 10
- L’emprunt rouge vaut 1

$$\begin{array}{r} 2\,{}^{1}4 \\ -\ {}^{1}19 \\ \hline 5 \end{array}$$

Les emprunts dans le système binaire :

- L’emprunt bleu vaut 2
- L’emprunt rouge vaut 1

$$\begin{array}{r} 1\,{}^{1}0 \\ -\ {}^{1}01 \\ \hline 1 \end{array}$$

(4)

- ## La division :

En binaire, les règles de la division sont :

- Si la partie du dividende que l’on divise est supérieure ou égale au diviseur, on marque un 1 au niveau du quotient
- Si la partie du dividende que l’on divise est inférieure au diviseur, on marque un 0 au niveau du quotient

Autrement, la division en binaire est en tout point similaire à celle en décimal.

IX. *La méthode Croisée/Décroisée et la suite de Fibonacci :*

Encore une fois, nous avons d'abord commencé par lister toutes les possibilités avec des nombres petits.

Par exemple, voici le nombre de possibilités pour un nombre de doigts total allant de 1 à 10 :

1 doigt	1 possibilité
2 doigts	2 possibilités
3 doigts	3 possibilités
4 doigts	5 possibilités
5 doigts	8 possibilités
6 doigts	13 possibilités
7 doigts	21 possibilités
8 doigts	34 possibilités
9 doigts	55 possibilités
10 doigts	89 possibilités

Au premier abord, rien de bien particulier, mais en y prêtant un peu plus attention, on remarque que cette suite : « 1, 2 3, 5, 8, 13, 34, 55, 89 » est bien particulière puisque ses termes correspondent exactement aux termes de la suite de Fibonacci.

Selon cette suite, chaque terme est égal à la somme des deux précédents.

Ainsi, on peut très facilement établir une formule de récurrence, (5) où les termes précédents de la suite sont nécessaires pour calculer le suivant. Ce qui permet de transcrire cette situation et l'exprimer de diverses manières :

- $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$
- $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$
- $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

Explication :

- L'écriture U_n sert à référer à un terme spécifique de la suite, si $n = 4$ alors U_n exprime le 4ème terme de la suite.
- U_{n+1} sert à exprimer le terme suivant, dans ce cas, le 5ème terme de la suite.
- U_{n-1} représente le terme précédent, donc pour reprendre le même exemple, si $n = 4$ alors U_{n-1} désigne le 3ème terme de la suite.

4. Conclusion :

En travaillant sur ce sujet, nous avons appris beaucoup de choses, et nous avons réussi à trouver la solution d'une grande partie du sujet.

Cependant certains points demeurent irrésolus et nombreuses sont les questions que nous nous sommes posées qui sont encore en suspens :

- Est-il possible de trouver un système pour ordonner la méthode Croisée/Décroisée ?
- Si, oui serait-il possible de calculer avec, toutes opérations confondues ?
- Ayant trouvé un lien entre la suite de Fibonacci et la méthode Croisée/Décroisée, nous menant à une formule par récurrence, est-il possible de trouver une formule générale qui permettrait de connaitre la valeur du terme U_n sans avoir à calculer les termes précédents ?
- Est-ce que le boulier pourrait être adapté pour que, comme avec la méthode Pliée/Tendue et Croisée/Décroisée, les mille-pattes puissent l'utiliser comme une nouvelle façon de compter ?
- Notre formule nous permet de calculer toutes les possibilités en définissant un nombre de doigts total, et un nombre de doigt(s) plié(s). Mais cela reste assez fastidieux pour des sommes élevées. Par exemple : pour 1000 il nous faut calculer le nombre de possibilités pour 1 doigt plié, 2 doigts pliés... jusqu'à 1000 doigts pliés.
    - Serait-il envisageable de créer une méthode qui ne fonctionne qu'avec une variable et qui pourrait calculer plus facilement le nombre total de possibilités pour un nombre de doigts noté N ?

Notes d'édition

(1) Si on additionne toutes les possibilités calculées, on obtient : 9 + 56 + 15 + 5 + 5 = 90 et non pas 100, mais l'erreur vient du fait que certains "touchers de phalanges" ne sont pas décomptés, par exemple pour 14, l'index touche la face arrière de la première phalange du pouce mais pour 15, il touche la *base* du pouce côté arrière, et de même en 11 et 10 côté avant. En ajoutant deux touchers par doigt, cela correspond mieux à l'image des os de la main et on trouve bien les 10 positions manquantes.
Il n'en reste pas moins que la démonstration est faite : bien plus de 5 nombres peuvent être encodés avec les doigts d'une seule main, peut-être à condition d'être hyperlaxe. Un aspect pratique empêche d'y avoir recours : certains encodages ne sont pas faciles à distinguer. Par exemple, 49 s'encode en touchant la face gauche de la phalange basse de l'annulaire, tandis que 62 demande de toucher la face droite de la phalange basse de l'auriculaire. La distinction visuelle n'est pas évidente. C'est un problème très courant et pratique qu'on retrouve en théorie de l'information, avec la notion de robustesse de l'encodage aux bruits des canaux de communication.

(2) Formule non démontrée dans sa généralité. En revanche, les mêmes arguments que ceux présentés sur le cas pratique ci-dessus permettraient de l'établir : n ! est le nombre de possibilités avec n doigts, si les P et les T sont distincts alors x ! et (n-x) ! sont les nombres de permutations pour respectivement x doigts pliés et donc n-x doigts tendus.

(3) En binaire, on ne conserve que les coefficients des puissances de 2, tout comme en écriture décimale, on ne conserve que les coefficients des puissances de 10.

(4) La dernière somme peut se retrouver en passant par les nombres décimaux : 1+1=2, ce qui s'écrit en binaire 10, soit un résultat de 0 pour les unités et une retenue de 1 pour les 'deuzaines'.

(5) Formule non démontrée : la lectrice, le lecteur sont invité·es à le faire !
De plus, U_n est le n-ème terme si on suppose que le premier terme est noté U_1.
Pour la suite de Fibonacci, on considère alors un 'pré-terme' U_0 qui vaut 1 et effectivement, sans aucun doigt, on ne peut représenter qu'un seul nombre.