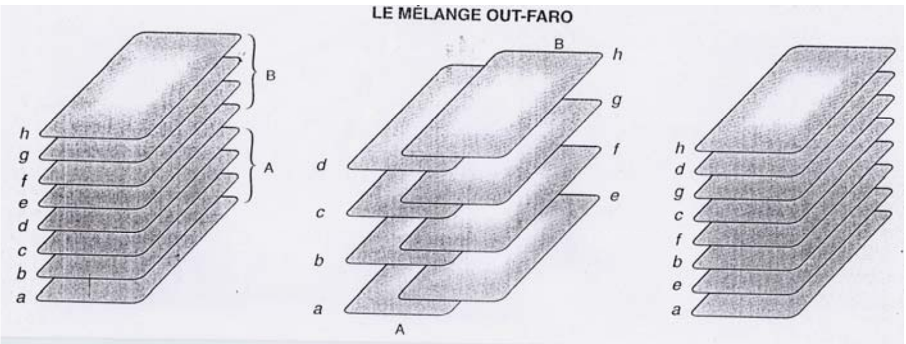
Chercheuse : Anne Parreau.
Professeurs :
Mme Avinzac et Mme Lecureux du lycée Ozenne
ainsi que M. Ronchini du lycée st Sernin.
Elèves : Nogues Alexandre (en première à Ozenne)
ainsi que Nouhen Hubert et Damblade Yohan
(en Terminale à st Sernin).

2002

Les faux mélanges.

Présentation du sujet.

On dispose d'un paquet de cartes. Le nombre de cartes de ce paquet est pair.
On effectue avec ce paquet de cartes plusieurs mélanges out faro.
Description d'un mélange out faro :
On coupe le tas de cartes en deux parties égales.
En premier, on pose la carte de dessous du tas de dessous, puis la carte de dessous du tas de dessus. On continue ensuite, de manière identique, en alternant les cartes de dessous du tas de dessous et les cartes de dessous du tas de dessus.
Voici un premier dessin qui illustre ce mélange avec un paquet de huit cartes :



Après avoir réitéré ce mélange sur plusieurs paquets de cartes, possédant chacun un nombre différent de cartes, on remarque que l'on retombe sur la disposition initiale des cartes.

Par exemple avec un paquet de 8 cartes, 3 mélanges out faro suffisent pour retomber sur la disposition initiale.
Les deux questions qui se posent alors sont : Quel que soit le nombre pair de cartes et quel que soit le mélange, retombe-t-on à chaque fois sur la disposition initiale des cartes ?
Si oui, en combien de mélanges ?

Cet article a pour but de répondre à ces deux questions**.**

Pour nous représenter les différentes dispositions des cartes après chaque mélange, nous allons assigner à chaque carte un numéro qui sera égal à sa position de départ. Nous établirons ensuite des colonnes de numéros qui représenteront les positions de chaque carte après chaque mélange.
Nous utiliserons cette représentation numérique pour mieux visualiser le résultat d'un quelconque mélange (pas nécessairement le mélange out faro) sur un paquet de cartes.
Voici un exemple de ce type de représentation avec le mélange out faro effectué sur un paquet de huit cartes et avec n représentant le nombre de mélanges effectués :

Mélanges out faro successifs.

	n=0	n=1	n=2	n=3
Position 1 :	1	1	1	1
Position 2 :	2	5	3	2
Position 3 :	3	2	5	3
Position 4 :	4	6	7	4
Position 5 :	5	3	2	5
Position 6 :	6	7	4	6
Position 7 :	7	4	6	7
Position 8 :	8	8	8	8

Sommaire :

<u>1) Retour à la disposition initiale</u>.

La réponse à la première question est :
Oui, on retombe sur la disposition initiale des cartes et ce quel que soit le mélange et quel que soit le nombre de cartes.

<u>Démonstration :</u>

Pour commencer, précisons que la démonstration qui va suivre est valable quel que soit le mélange et le nombre de cartes utilisé, elle reste donc valable pour le mélange out faro.
Cette démonstration s'effectue en deux étapes.
Tout d'abord, nous allons démontrer qu'au moins une des dispositions se répète.
Puis nous montrerons que la disposition initiale (d_0) est la première à se répéter.

1. Au moins une des dispositions se répète.

On dispose d'un nombre fini D de cartes.
On a associé à chaque carte un numéro, on a donc D numéros. Faire des mélanges c'est changer l'ordre de ces numéros par rapport à leur ordre initial.

Etant donné que l'on a un nombre fini de numéros, on a également un nombre total d'ordres possibles pour ces numéros qui est fini (et qui est D !).
Le nombre total de dispositions possibles des cartes est donc un nombre fini, or on n'est pas limité sur le nombre de mélanges à réaliser, il est donc possible de faire se répéter au moins une des dispositions.

Plus précisément : Si le nombre *n* de mélanges réalisés est strictement supérieur à D ! alors une des dispositions est apparue au moins deux fois.
On a donc prouvé qu'au moins une des dispositions finit par se répéter.

2. La disposition initiale d_0 est la première disposition à se répéter.

Notons d_n la disposition obtenue après *n* mélanges.

Raisonnement par l'absurde :

Supposons que la première disposition à se répéter ne soit pas d_0 mais une autre disposition : d_n. Cette disposition d_n se répète après *p* mélanges à partir de sa première apparition ($d_n = d_{n+p}$).

On a donc cette situation :

$\leftarrow$ *p* mélanges $\rightarrow$

(d_0) (d_n) (d_{n+p})

1 - - - - - - - | - - - - - - - - - - |
2 - - - - - - - | - - - - - - - - - - |
\- - - - - - - - | - - - - - - - - - - |
\- - - - - - - - | - - - - - - - - - - |
\- - - - - - - - | - - - - - - - - - - |
n - - - - - - - | - - - - - - - - - - |

Soit *f* la fonction représentant le mélange. Cette fonction associe à une disposition de cartes la disposition obtenue en effectuant le mélange. Pour tout n entier naturel, on a :
$f(d_n) = d_{n+1}$.
Cette fonction est une bijection.
En effet :
Deux cartes de positions différentes au mélange (n-1) ne peuvent pas prendre la même position au mélange n.
De plus, une carte de position k au mélange n n'a pu occuper qu'une seule et unique position au mélange (n-1). Or à partir de ces deux résultats il est facile de prouver que *f* est une bijection.

Il existe donc une fonction g, représentant le mélange inverse, telle que : $g = f^{(-1)}$. Donc g est une bijection.
Donc pour tout n entier naturel, on a :
$g(d_n) = d_{(n-1)}$.

Or en réitérant n fois le mélange inverse g à partir de d_{n+p} on trouve la disposition d_0, ce qui constitue une contradiction.
Plus précisément :
Soit g^n la composée nième de g.
On a donc : $g^n(d_n) = d_{n-n} = d_0$.
$g^n(d_{n+p}) = d_{n+p-n} = d_p$.

Or $d_n = d_{n+p}$ donc $d_0 = d_p$.
Cependant ceci est impossible.
En effet : d_p est comprise entre d_0 et d_{n+p}. Or entre ces deux dispositions il n'y aucune disposition égale à d_0 car on a supposé que d_0 ne s'est pas répétée.
Donc supposer que d_0 n'est pas la première disposition à se répéter conduit à une contradiction.
On peut donc affirmer que, quel que soit le mélange et le nombre de cartes, c'est la disposition de départ qui se répète en premier.
Ce résultat reste donc vrai pour le mélange out faro.
La première question est donc résolue.

2)Temps de retour pour le mélange out faro.

Considérons la conjecture suivante **:**

Si la carte numéro 2 revient à sa position initiale au $n^{ième}$ mélange, alors il en est de même pour toutes les autres cartes.

A partir de cette conjecture, que l'on prouvera par la suite, on peut dire que pour étudier le temps de retour à la disposition initiale, il suffit d'étudier le temps de retour à sa position initiale de la carte numéro 2.

Etudions le mouvement de chaque carte et utilisons cette étude pour prévoir le temps de retour de la carte numéro 2 à sa position initiale.

Avant de débuter, on peut préciser que l'on est sûr que la carte numéro 2 revient à sa disposition initiale, car on a prouvé précédemment que, pour un nombre *n* suffisant de mélanges, toutes les cartes reviennent simultanément à leur place initiale.

1. Etude des mouvements des cartes.

Cette représentation montre le mouvement des cartes lorsqu'on effectue six mélanges out faro avec un tas de 10 cartes :

mouvement

	1	1	1	1	1	1	1
1	2	6	8	9	5	3	2
2	3	2	6	8	9	5	3
3	4	7	4	7	4	7	4
4	5	3	2	6	8	9	5

4	6	8	9	5	3	2	6
3	7	4	7	4	7	4	7
2	8	9	5	3	2	6	8
1	9	5	3	2	6	8	9
	10	10	10	10	10	10	10

Premiers constats (venant directement du mélange) :
La première et la dernière carte ne bougent jamais.
Les cartes du tas de dessous “ montent ” (elles se rapprochent de la première position). Les cartes du tas de dessus “ descendent ” (elles se rapprochent de la dernière position).

Deuxième constat :
Les cartes bougent en fonction de leur position dans le paquet.

Précisons le mouvement de chaque carte ::

Lorsqu’un tas de 2*c* cartes est coupé, on obtient deux tas de *c* cartes.

Nommons le tas de dessus le tas contenant les cartes de position :
{1,2....*c*}
Nommons le tas de dessous le tas contenant les cartes de position :
{*c*+1,*c*+2,.....2*c*}

Les deux cartes à bouger le plus sont les cartes de position : *c* et *c*+1.

La carte de position *c* du tas de dessus va en position 2*c*-1 et donc bouge de *c*-1 positions.
La carte de position *c*-1 va bouger d’une position de moins que la carte de position *c* car avant qu’elle soit posée, il y a eu une carte du tas de dessous qui a été posée.
Donc la carte du tas de dessus de position *k* va bouger lors d’un mélange de (*c*-1)-(*c*-*k*) positions soit (*k*-1) positions.

Intéressons nous maintenant aux cartes du tas de dessous.
La carte de position (*c*+1) va en position 2 et donc bouge également de *c*-1 positions.

La carte de position (c+2) va bouger d'une position de moins que la carte de position (c+1) car avant qu'elle soit posée, il y a eu une carte du tas de dessus qui a été posée.
Donc la carte du tas de dessous de position k' va bouger lors d'un mélange de (c-1)-(k'-(c+1)) soit de (2c-k') positions.

Bilan : Les cartes du tas de dessus et celles du tas de dessous bougent différemment.
-Soit une carte du tas de dessus et de position *k* au mélange *n*.
Sa position au mélange *n*+1 sera *k*+(*k*-1) soit 2*k*-1.
-Soit une carte du tas de dessous et de position *k'* au mélange n.
Sa position au mélange *n*+1 sera *k'*-(2*c*-*k'*) soit 2*k'*-2*c*.

NB : Pour les cartes du tas de dessus on ajoute le " mouvement " à la position initiale car les cartes du tas de dessus " descendent ".
Pour celles du tas de dessous on soustrait le mouvement à la position initiale car les cartes du tas de dessous " montent ".

2. Suite définie par récurrence.

Maintenant que le mouvement de chaque carte est précisé, essayons d'établir les numéros des différentes cartes qui vont se placer après chaque mélange en une position k fixée.
Introduisons pour cela la notation : Uk(n).
Uk(n) est le numéro (et la position initiale) de la carte qui prend la position k au $n^{\text{ième}}$ mélange.
Ex : Uk(0) = k.
Nous allons maintenant établir une relation de récurrence pour la suite Uk (k est fixé).
Considérons la carte de numéro Uk(n).
Cette carte occupe la position k au nième mélange.

Introduisons une fonction T représentant le mélange out faro.

Cette fonction T associe à une position k au mélange n, qu'elle soit du tas de dessus ou de dessous, sa position correspondante au mélange n+1. On sait qu'une carte donnée est la seule à pouvoir se placer à la position k au (n+1)ième mélange car deux cartes, au même mélange, ne peuvent pas occuper la même position, autrement dit T est une bijection.

Soit T^n la composée $n^{ième}$ de T.

Soit $T^{(-1)}$ sa fonction réciproque.

Considérons maintenant la carte de numéro $Uk(n)$ et celle de numéro $Uk(n+1)$.

On a donc $T^{n+1}(Uk(n+1)) = T^n(Uk(n)) = k$

$$T^n(T(Uk(n+1)) = T^n(Uk(n))$$

La fonction T est une bijection donc T^n l'est également.

On peut donc affirmer $T(Uk(n+1)) = Uk(n)$ c'est à dire que la carte de numéro $Uk(n+1)$ prend, au premier mélange, la position $Uk(n)$.

Si $Uk(n)$ est pair alors la carte de numéro $Uk(n+1)$ fait au départ partie du tas de dessous car la position d'une carte du tas de dessous (de position k) après un mélange est : $2k-2c$ (qui est pair).

Si $Uk(n)$ est impair alors la carte de numéro $Uk(n+1)$ fait au départ partie du tas de dessus car la position d'une carte du tas de dessus (de position k') après un mélange est : $2k'-1$ (qui est impair).

On a donc :

Pour $Uk(n)$ pair : $2Uk(n+1)-2c = Uk(n)$

Pour $Uk(n)$ impair : $2Uk(n+1)-1 = Uk(n)$

Nous avons donc une suite Uk définie par récurrence telle que :

Pour $Uk(n)$ pair : $$Uk(n+1) = \frac{Uk(n)+2c}{2}$$

Pour U*k*(*n*) impair : U*k*(*n*+1) = $\mathbf{\dfrac{U\mathit{k}(\mathit{n})+1}{2}}$

On obtient donc une suite U*k* définie par récurrence qui permet, si l'on connaît U*k*(0), de déterminer les numéros des différentes cartes à se placer en position *k* après chaque mélange.
Le but de cette partie est, rappelons le, de déterminer le temps de retour de la carte numéro 2.
Pour cela considérons la suite U2.
Cette suite possède les mêmes liens de récurrence que ceux de la suite U*k*, de plus U2(0) = 2.

On peut donc faire calculer les termes de cette suite à un programme informatique, puis lui dire de s'arrêter lorsque U2(*n*) = 2.
On lui fait alors compter le nombre *n* de termes ainsi obtenus.
Ce nombre *n* de termes est égal au nombre de mélanges nécessaire au retour de la carte numéro 2 à sa disposition initiale.
Ce programme nous permet donc de connaître le temps de retour de la carte numéro 2.
NB : On remarque, grâce à cette suite, que le temps de retour pour un paquet de 2 puissance *m* cartes est de *m* mélanges.

3) Démonstration de la conjecture.

Dans toute cette partie, il est uniquement question du mélange out-faro.

Rappel de la conjecture **:**

Si la carte numéro 2 revient à sa position initiale au mélange *n*, alors il en est de même pour toutes les autres cartes.

Démontrons que cette conjecture est exacte.

n est le numéro du mélange et k une position quelconque.

1. Prouvons par réccurence et pour tout n entier naturel la proposition P(n) suivante :

Pour tout k, il existe un entier e dépendant uniquement de n tel que :
U(k+1)(n)-Uk(n) = e (mod 2c-1).

Initialisation :
Pour $n = 0$, la disposition est la disposition initiale et donc pour tout k :
U (k+1)(0)-Uk(0) = 1.
Donc $e = 1$ convient.
Donc P(0) est vraie.

Hérédité :
Supposons que P(n) soit vraie pour un quelconque entier naturel n.
Il existe donc un entier e indépendant de k tel que :
U(k+1)(n)-Uk(n) = e (mod 2c-1)   **(1)**.

Or on sait, d'après la deuxième partie que :

Pour Uk(n) pair : 2Uk(n+1)-2c = Uk(n).
Pour Uk(n) impair : 2Uk(n+1)-1 = Uk(n).

Donc pour tout Uk(n) et pour tout k on a:

Uk(n) = 2Uk(n+1)-1 (mod 2c-1).

En utilisant cette égalité dans **(1)** on obtient pour tout k:

(2Uk+1(n+1)-1)-(2Uk(n+1)-1) = e (mod 2c-1).

On a donc: 2(Uk+1(n+1)-Uk(n+1)) = e (mod 2c-1).

Soit k et k' deux positions distinctes.
Soit l'entier e_k tel que e_k = Uk+1(n+1)-Uk(n+1).
Soit l'entier $e_{k'}$ tel que $e_{k'}$ = Uk'+1(n+1)-Uk'(n+1).

On a donc: $2e_k = 2e_{k'}$ (mod 2c-1).

Or 2 est premier avec 2c-1.
Donc, d'après le théorème de Gauss: $e_k = e_{k'}$ (mod 2c-1).
Donc $e = e_k$ convient et P(n+1) est vraie.

Donc P(0) est vraie et P(n) vraie implique P(n+1) vraie.
On a donc démontré par réccurence que P(n) est vraie pour tout n entier naturel.

2. Utilisation de la démonstration par récurrence:

Soit l'entier e_k tel que $e_k = U_{k+1}(n)-U_k(n)$.
On a:
$|e_k| < 2c-1$ **(2)** : car la première et la dernière carte ne bougent jamais.
$e_k > -2c+2$ **(3) :** en effet d'après (1) e_k ne peut être strictement inférieur à -2c+2. De plus si $e_k = -2c+2$ alors $U_{k+1}(n)-U_k(n) = -2c+2$. Or le seul couple ($U_k(n)$; $U_{k+1}(n)$) qui vérifie cette équation est le couple (2c-1 ; 1), ce qui signifierait que la carte de numéro 1 est placé au-dessous de celle de numéro 2c-1, ce qui est absurde puisque la carte de numéro 1 ne bougent jamais.

Considérons maintenant le mélange n où la carte numéro 2 revient à sa position initiale.
La première carte ne bouge jamais. Donc l'écart e_1 au mélange n entre le numéro de la deuxième carte et celui de la première carte est de :
$e_1 = 2-1 =1$.
Donc, d'après la démonstration par récurrence et d'après (2), les seules valeurs possibles de ek lors du retour de la carte numéro 2 à sa position initiale sont : 1 et 1-(2c-1).

Supposons que $e_k = 1-(2c-1)$.
On a donc $e_k = -2c+2$.
Or d'après **(3)** c'est impossible.
Donc, si la carte numéro 2 revient à sa disposition initiale au nième mélange, alors l'écart e_k ne peut être qu'égal à 1 pour toute position k

et donc on retrouve la disposition initiale de toutes les cartes au nième mélange.
La conjecture est donc démontrée.

On connaît donc un algorithme pour calculer le temps de retour pour le mélange out faro.