Maths et musique

Année 2015 – 2016

Grégoire SEILLIER, Julie THOMAS, Léonie JIANG, élèves de 1ère S .

Encadrés par MARTINELLI-BOUSQUET Laurie, GOTTE Christine, KROLL Catherine

Établissements : Lycée St Paul et Lycée Jean Puy de Roanne (42)

Chercheur : Frédéric CHADARD, Université Jean Monnet, St Etienne

Présentation du sujet

La musique actuelle utilise la gamme tempérée : la fréquence d'une note est $440 * 2^{\frac{k}{12}}$, avec k le nombre de demi-tons séparant la note en question du la 3.
— Pourquoi les musiciens préfèrent-ils jouer deux notes dont le rapport des fréquences est une fraction avec un petit dénominateur ?
— Pourquoi les musiciens ont-ils choisi 12 pour définir la gamme ?

— Pourriez-vous imaginer un meilleur choix ?

La musique étant aujourd'hui omniprésente dans notre quotidien, comprendre le lien entre celle-ci et les mathématiques nous a tous les trois tout de suite intéressés.

Pour commencer, nous avons cherché à retracer les origines de la musique et comment certains Mathématiciens l'ont étudiée.

I. La naissance des gammes

Jouer de la musique, c'est essentiellement jouer des notes les unes à la suite des autres ; cette succession de notes est ce qu'on appelle une mélodie. Mais on peut aussi jouer des notes simultanément, on parle dans ce cas d'accords. Dans tous les cas, le choix des notes utilisées doit obéir à certaines règles. Parmi ces règles, on trouve le principe de la consonance et de la dissonance.

Ainsi, nous en sommes rapidement venus à la question suivante : Pourquoi deux sons sonnent harmonieusement ou disgracieusement ensemble ?

1. Qu'est-ce qu'une note ?

Une note de musique est caractérisée par sa hauteur. La hauteur d'une note indique si le son perçu est plus ou moins grave ou aigu. D'un point de vue physique, cette hauteur correspond à ce qu'on appelle **la fréquence** fondamentale du son, qui s'exprime en Hertz (Hz). Plus la fréquence du son est élevée, plus le son est aigu. Dans notre sujet la note appelée « La 3 » a une fréquence fondamentale de 440 Hz.

Tout d'abord, il faut savoir que la fréquence est le nombre d'oscillations périodiques par seconde. Elle s'exprime en Hertz (Hz). On parlera également de hauteur d'un son.

Un son est dit pur lorsque l'onde est parfaitement sinusoïdale. Il s'agit du son le plus simple qui puisse exister.

Lorsqu'on utilise un analyseur de spectre et qu'on analyse une note produite par un instrument, on se rend compte que le son résultant n'est pas composé d'un son pur mais d'une multitude de fréquences. C'est le physicien Joseph Fourier qui a découvert qu'un son complexe et donc non sinusoïdal (tel qu'une note jouée par un instrument) pouvait être décomposé en une succession de sons purs, appelées harmoniques.

Ici, nous traiterons uniquement de la fréquence fondamentale des notes et non de ses harmoniques…

2. La gamme de Pythagore:

Pythagore, mathématicien célèbre du VIème siècle avant JC, est le premier à s'intéresser à l'harmonie des sons et à tenter de créer une gamme qui définirait, en fonction de la fréquence d'une note, quelle note est préférable de jouer.

En faisant vibrer des cordes de longueur et de tensions différentes, il parvient à obtenir des intervalles, c'est-à dire le rapport de deux fréquences, plus ou moins harmonieux.

En partant d'une corde de longueur x et d'une corde de longueur $\frac{1}{2}x$, il remarque que lorsqu'il joue des 2 cordes en même temps l'harmonie est parfaite. On explique aujourd'hui cela par le fait que deux sons sont à l'octave l'un de l'autre lorsque le rapport de leur fréquence est égal à 2.

De la même manière, il obtient un son harmonieux avec une corde de longueur x et une corde de longueur $\frac{2}{3}x$: cet intervalle est aujourd'hui appelé la quinte (rapport de fréquence égale à $\frac{3}{2}$)

La gamme de Pythagore est donc fondée sur les quintes et les octaves : on prend une hauteur de départ (la fréquence f_0) et on la multiplie plusieurs fois par $\frac{3}{2}$, puis on la divise par 2 le nombre de fois nécessaire pour la ramener entre f_0 et 2 f_0 (soit dans l'octave).

En prenant pour note de départ le Do 3 d'une fréquence de 261.63Hz,

Rapports des fréquences pour 12 quintes pures successives

Quintes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Rapports	1	3/2	$3^2/2^2$	$3^3/2^3$	$3^4/2^4$	$3^5/2^5$	$3^6/2^6$	$3^7/2^7$	$3^8/2^8$	$3^9/2^9$	$3^{10}/2^{10}$	$3^{11}/2^{11}$	$3^{12}/2^{12}$

La quinte do-sol on a $f_{sol} = f_{do} \times \frac{3}{2}$

La quinte sol-ré on a $f_{re} = f_{sol} \times \frac{3}{2} = f_{do} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = f_{do} \times \frac{9}{4}$

or $\frac{9}{4} > 2$ donc on divise ce résultat par deux pour rester dans l'octave :

$a_1 = (\frac{3}{2})^1 = \frac{3}{2}$ normalisé $\frac{3}{2}$ $\quad$ $a_2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ normalisé $\frac{9}{8}$

$a_3 = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$ normalisé $\frac{27}{16}$ $\quad$ $a_4 = (\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$ normalisé $\frac{81}{64}$ $\quad$ ainsi de suite …….

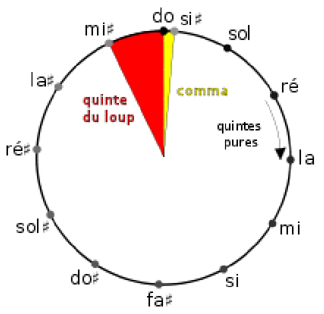
On obtient ainsi $a_{12} \approx 2{,}02$ ce qui est très proche de 2 donc de l'octave. a_{12} normalisé est donc voisin de 1. Pythagore a donc considéré qu'il était revenu « au point de départ » donc sa gamme comporte 12 notes.

Par exemple, si on applique ces rapports de fréquence à un Do de fréquence 260.7 Hz, on obtient les notes suivantes : on les classe par ordre croissant de leur fréquence quand leur rapport est normalisé (Le nom attribué aux notes obtenues date en fait du moyen âge).

	Nom de la note	Fréquence	rapport entre la fréquence et celle du do	Intervalle entre la note et le do exprimé en octaves et quintes	note située une quinte au-dessus	fréquence de la note située une quinte au-dessus	rapport de fréquence entre la note située une quinte au-dessus et celle de la note de départ	
Note_1	do	260.741	1/1	0_quinte(s)-_0_octave(s)	sol	391.111	1.5	quinte juste
Note_2	do#	278.437	2187/2048	7_quinte(s)-_4_octave(s)	sol#	417.656	1.5	quinte juste
Note_3	ré	293.333	9/8	2_quinte(s)-_1_octave(s)	la	440	1.5	quinte juste
Note_4	ré#	313.242	19683/16384	9_quinte(s)-_5_octave(s)	la#	469.863	1.5	quinte juste
Note_5	mi	330	81/64	4_quinte(s)-_2_octave(s)	si	495	1.5	quinte juste
Note_6	mi#	352.397	177147/131072	11_quinte(s)-_6_octave(s)	do	521.481	1.4798	quinte du loup
Note_7	fa	371.25	729/512	6_quinte(s)-_3_octave(s)	do#	556.875	1.5	quinte juste
Note_8	sol	391.111	3/2	1_quinte(s)-_0_octave(s)	ré	586.667	1.5	quinte juste
Note_9	sol#	417.656	6561/4096	8_quinte(s)-_4_octave(s)	ré#	626.484	1.5	quinte juste
Note_10	la	440	27/16	3_quinte(s)-_1_octave(s)	mi	660	1.5	quinte juste
Note_11	la#	469.863	59049/32768	10_quinte(s)-_5_octave(s)	mi#	704.795	1.5	quinte juste
Note_12	si	495	243/128	5_quinte(s)-_2_octave(s)	fa	742.5	1.5	quinte juste

Cependant, nous avons pu nous rendre compte que cette gamme avait des limites. En effet, la fréquence de la dernière note obtenue est une note différente de la note de départ à l'octave : sa fréquence est légèrement plus élevée : le rapport obtenu étant très proche de 2.

Pythagore décida donc d'arrondir le rapport. La dernière quinte a donc un rapport de fréquence inférieur à une quinte pure. C'est pour cela qu'on lui donne le nom de quinte du loup (1). Car on pouvait la comparer au hurlement d'un loup. Celle-ci varie selon la note de départ (voir le dessin).



La gamme de Pythagore comporte donc 11 quintes justes, et une quinte fausse (qui dépend de la note de départ choisie pour la gamme) .En effet, il est mathématiquement impossible de construire une gamme uniquement à l'aide de quintes justes (car les nombres 2 et 3 n'ont pas de diviseur commun). Il faut donc éviter de jouer dans la quinte du loup mais cela pose des difficultés pour transposer une œuvre.

C'est une des raisons pour lesquelles, les mathématiciens ont donc cherché à mettre au point d'autres gammes plus précises, sans écarts perceptibles.

3. La gamme tempérée

La gamme tempérée a été créée pour régler les problèmes des autres gammes (Pythagore, Zarlino). En effet, dans les gammes précédentes, les écarts de fréquence entre chaque note de la gamme étaient différents : Il était donc impossible de transposer des mélodies. Qu'entend-t-on par transposer une mélodie ? C'est être capable, à partir de n'importe quelle note de la gamme, de reproduire la même mélodie, mais à une hauteur différente. Pour cela, les théoriciens de la musique ont créé une nouvelle gamme.

LA GAMME TEMPEREE est composée de 12 **demi-tons** exactement égaux. Les rapports des fréquences entre deux notes consécutives, n'importe laquelle sur le clavier, sont égaux. On note ce rapport a :

On a donc $a = \frac{do\#}{do} = \frac{re}{do\#} = \ldots$

On a donc comme rapport de fréquence pour deux notes séparées d'une octave : axaxa... = a^{12} .

On a donc : la fréquence de la note à l'octave = $a^{12} \times$ la fréquence de la note de départ

On sait de plus que pour obtenir une octave, il faut multiplier sa fréquence par 2 :

D'où $a^{12} = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059\ 463$

II. Recherche d'une meilleure gamme

Pour répondre à la dernière question de notre sujet qui était: « Pourriez-vous imaginer une meilleure gamme ? », nous avons repris le principe de la gamme tempérée, c'est-à-dire, une gamme dans laquelle tous les rapports de fréquence entre chaque note successive est le même.(2)

Le rapport de fréquence d'une quinte tempérée est de $2^{7/12}$ donc l'écart avec la quinte pure est d'environ 0,00169292

Nous avons donc cherché, à l'aide d'Excel, une gamme dont la quinte se rapprocherait le plus d'une quinte pure.

Pour cela, nous avons donc rentré dans le tableau la différence entre une quinte pure et la quinte de nos gammes. Finalement, nous sommes arrivés au tableau suivant :

	12	13	14	15	16	17
1	0,440537	0,445234	0,449243	0,452706	0,455726	0,458384
2	0,377538	0,387469	0,39591	0,403175	0,409492	0,415036
3	0,310793	0,32654	0,339871	0,351302	0,361211	0,369884
4	0,240079	0,262274	0,280986	0,296975	0,310793	0,322853
5	0,16516	0,194488	0,219113	0,240079	0,258142	0,273865
6	0,085786	0,122991	0,1541	0,180492	0,20316	0,222838
7	0,001693	0,047577	0,085786	0,118087	0,145744	0,169688
8	-0,0874	-0,03197	0,014006	0,052731	0,085786	0,114326
9	-0,18179	-0,11587	-0,06142	-0,01572	0,023174	0,056659
10	-0,2818	-0,20436	-0,14067	-0,0874	-0,04221	-0,00341
11	-0,38775	-0,2977	-0,22395	-0,16248	-0,11049	-0,06597
12	-0,5	-0,39616	-0,31145	-0,2411	-0,18179	-0,13114
13		-0,5	-0,40339	-0,32344	-0,25625	-0,19902
14		-0,60953	-0,5	-0,40968	-0,33401	-0,26973
15		-0,72506	-0,60151	-0,5	-0,41521	-0,34338
16			-0,70818	-0,59459	-0,5	-0,42009
17			-0,82026	-0,69365	-0,58855	-0,5
18			-0,93803	-0,7974	-0,68102	-0,58323
19			-1,06177	-0,90605	-0,77758	-0,66993
20			-1,1918	-1,01984	-0,87841	-0,76023
21				-1,13902	-0,98372	-0,85429
22				-1,26383	-1,09368	-0,95227
23				-1,39454	-1,20851	-1,05432
24					-1,32843	-1,16062
25					-1,45365	-1,27135
26						-1,38668
27						-1,50681
28						-1,63194
29						-1,76228
30						-1,89805
31						-2,03946
32						-2,18676

52	53	54
0,486581	0,48683586	0,487081
0,472982	0,47349842	0,473996
0,4592	0,45998541	0,460741
0,445234	0,4462945	0,447315
0,43108	0,43242337	0,433715
0,416736	0,41836964	0,41994
0,4022	0,40413091	0,405987
0,387469	0,38970473	0,391854
0,372539	0,37508864	0,377538
0,35741	0,36028015	0,363037
0,342078	0,34527671	0,348349
0,32654	0,33007577	0,333471
0,310793	0,31467472	0,318401
0,294835	0,29907093	0,303136
0,278663	0,28326173	0,287674
0,262274	0,26724441	0,272012
0,245665	0,25101624	0,256148
0,228833	0,23457444	0,240079
0,211775	0,2179162	0,223802
0,194488	0,20103866	0,207315
0,17697	0,18393895	0,190615
0,159216	0,16661413	0,1737
0,141224	0,14906125	0,156566
0,122991	0,1312773	0,13921
0,104512	0,11325924	0,12163
0,085786	0,09500399	0,103823
0,066809	0,07650842	0,085786
0,047577	0,05776937	0,067517
0,028087	0,03878364	0,049011
0,008336	0,01954798	0,030266
-0,01168	5,9097E-05	0,011278
-0,03197	-0,0196863	-0,00795

La première ligne correspond au nombre de notes dans la gamme mais aussi au dénominateur dans l'exposant de 2, que l'on note c.
La première colonne correspond au rang de la note dans la gamme, que l'on note b.

Nous avons donc fait le calcul suivant : $\frac{3}{2} - 2^{b/c}$

Les valeurs en rouges sont les écarts les plus faibles que nous avons trouvés. On remarque que la meilleure gamme que nous ayons trouvée est composée de 53 notes et la quinte se situe à la 31^e position. L'écart de rapport entre notre quinte et une quinte pure est de $5{,}9097 \times 10^{-5}$ environ.

III. Fractions continues

Nous avons ensuite utilisé les fractions continues pour retrouver les résultats de notre conjecture faite à l'aide du tableur. En effet, notre objectif est de trouver la puissance de 2 dont le résultat se rapproche le plus de 3/2(3). Nous avons donc utilisé le logarithme népérien qui a la propriété suivante:

$$\ln(a^r)=r \ln(a) \text{ avec } r \in \mathbf{Q}$$

On sait que $2^{a/b}=\frac{3}{2}$. On a donc $\ln(2^{a/b})=\ln(\frac{3}{2}) \Leftrightarrow \frac{a}{b} \times \ln(2)=\ln(\frac{3}{2}) \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{\ln(\frac{3}{2})}{\ln(2)}$

Donc $\frac{a}{b} \approx 0{,}5849625007$

Appliquons ensuite le principe des fractions continues pour approcher ce nombre décimal(4).

0,584962501	0
1,709511291	1
1,40942084	1
2,442474596	2
2,260016753	2
3,845906042	3
1,18216439	1
5,489547092	5
2,042704402	2
23,4167898	23
2,399290938	2
2,504439509	2
1,98239825	1
1,017917122	1
55,81253404	55
1,230717674	1
4,334301672	4

Ce qui donne donc 0,5849625007 ≈

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{1}{2}}}}}}}}$$

$\boxed{\textit{arrêt à cette étape} : \frac{7}{12}}$

$\boxed{\textit{arrêt à cette étape} : \frac{31}{53}}$

On retrouve donc bien la fraction de $\frac{7}{12}$ qui correspond à la position de la quinte dans notre gamme actuelle.

Puis si on va une étape plus loin, on retrouve la gamme de 53 notes avec un rapport pour la quinte de $\frac{31}{53}$. Nous pourrions continuer cette décomposition pour approcher encore plus la valeur cherchée mais le nombre de notes deviendrait trop conséquent.

Finalement, nous sommes donc parvenu à trouver une gamme plus harmonieuse car plus proche de la quinte pure mais qui serait plus difficile à mettre en place car elle comporterait 53 notes ou plus. Nous pouvons donc nous demander l'utilité d'une telle gamme sachant que l'oreille ne perçoit pas les améliorations qu'elle pourrait apporter.

Enfin, ce sujet nous a permis de voir l'harmonie musicale sous un autre angle et de découvrir comment nous sommes parvenus à notre gamme actuelle.

Notes d'édition

(1) Le compositeur français François Couperin (1668 – 1733) a d'ailleurs écrit une pièce pour clavecin intitulée « La Quinte du Loup » au cours de laquelle on entend cette « quinte » : il faut bien sûr accorder l'instrument en « quintes justes » pour entendre tout le sel de cette œuvre !

(2) Comme on le verra plus loin, la solution trouvée comportera beaucoup plus que 12 degrés.

(3) Il faudrait dire : « la puissance de 2 la plus proche possible de 3/2»

(4) Écrire un nombre décimal d (ou tout autre nombre rationnel) sous forme d'une fraction continue, c'est l'exprimer sous la forme :$d = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$ où $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (qu'on appelle les quotients partiels) sont des entiers. La suite (a_n) est finie pour les nombres rationnels. C'est l'algorithme d'Euclide (celui qui sert pour la recherche du pgcd) ou plutôt l'algorithme d'Euclide étendu qui permet de calculer les éléments de la suite.(a_n). Réciproquement, toute fraction continue « finie » représente un nombre rationnel. Pour les nombres irrationnels, le développement en fraction continue est donc infini mais il permet en principe une très bonne approximation d'un nombre réel irrationnel par des rationnels.