MASSACRE EN CERCLE

Année 2013 – 2014

Alban MAURON, élève de Seconde
Lionel HEMMERLE, élève de Première S

Encadrés par David Gréau

Établissements : Lycée Moquet-Lenoir, Châteaubriant (44)

Chercheur : François Ducrot, faculté des sciences d'Angers

Présentation du sujet :

Dans la mine de la Moria, quarante gobelins pris au piège par des nains ne voulant pas tomber aux mains de ces derniers décidèrent de s'entre-tuer de façon algorithmique...Ils se disposèrent en cercle et décidèrent de compter dans l'ordre jusqu'à trois, celui disant trois étant tué et ainsi de suite...jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux gobelins. Où doivent se placer les deux gobelins qui préfèrent être lâchement prisonniers des nains?

Sommaire :

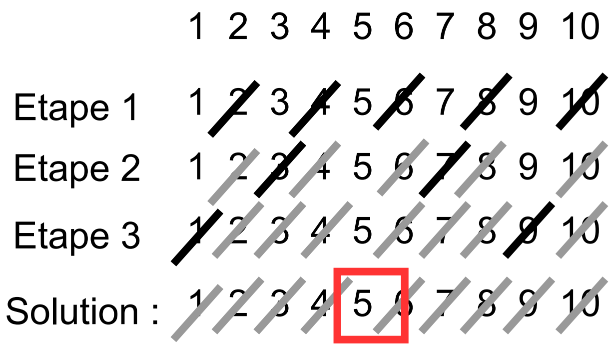
I- Notations :

On note :
- *n* le nombre jusqu'auquel ils comptent, donc n est un entier supérieur ou égal 2 ;
- *m* le nombre total de gobelins composant le cercle, donc m est un entier supérieur ou égal à n ;
- S_i la fonction qui donne le rang du i-ème gobelin survivant en fonction de m.

On remarque de façon évidente que si l'on compte jusqu'à n, il y a n–1 survivants. Pour n=3, il y aainsi deux survivants et les rangs des survivants sont donnés par $S_1(m)$ et $S_2(m)$.

II- Quand les gobelins comptent jusqu'à deux, c'est à dire quand n = 2

Voici un exemple dans lequel les gobelins comptent jusqu'à deux :



Survivant pour 10 gobelins lorsqu'ils comptent jusqu'à 2

Dans cet exemple, le gobelin survivant est le cinquième du cercle soit $S_1(10)=5$

a- Quand il y a un gobelin de plus soit déterminer S(m+1) en fonction de S(m)

Théorème :

Pour *m+1 gobelins,* le rang du survivant est égal au rang du survivant pour *m* gobelins auquel on ajoute 2 modulo m+1 soit : *S(m+1) = S(m) + 2 modulo (m+1).*

Démonstration :

1 2 3 4 5 … m+1

Lorsqu'il y a *m+1* gobelins, nous devons en tuer un pour atteindre un cercle où il y a *m* gobelins.

1 ~~2~~ 3 4 5 …m+1

Ensuite, nous continuons comme si il y avait *m* gobelins, mais on compte à partir du premier gobelin mort (le deuxième).

1 ~~2~~ $\boxed{3\ 4}$ 5 …m+1

3 – 1 = 2

On a donc un décalage de *2* entre le rang du survivant entre m gobelins et m+1 gobelins. Le modulo permet de revenir au début : quand il y a 16 gobelins, le *17ème* ne peut pas mourir, c'est le *1er* qui meurt (1).

Ainsi on a démontré que : S(m+1) = S(m) + 2 modulo m+1

Exemple *:*

Pour 11 gobelins, nous avons :

$S(11) = S(11 - 1) + 2 \text{ modulo } 11$

$S(11) = S(10) + 2 \text{ modulo } 11$

or :

$S(10) = 5$

donc :

$S(11) = 5 + 2 \text{ modulo } 11$

$S(11) = 7 \text{ modulo } 11$

Le survivant quand il y a 11 gobelins est donc le 7ème gobelin du cercle.

<u>*b- Quand il y a deux fois plus de gobelins soit déterminer S(2m) en fonction de S(m)*</u>

Théorème :

Pour 2m gobelins, le rang du survivant est égal à la position du survivant pour m gobelins multipliée par 2 et à laquelle on enlève 1 : $S(2m)= 2S(m) - 1$.

Démonstration :

1 2 3 4 5 …2m-1 2m

Lorsque nous avons *2m* gobelins, nous devons d'abord faire un tour de boucle, qui supprimera alors tous les gobelins ayant un rang *pair.*

$1\ \cancel{2}\ 3\ \cancel{4}\ 5\ \dots\ \cancel{2m}$

Nous continuons alors comme s'il y avait m gobelins, sauf que ces m gobelins ont un rang *impair.*

$\boxed{1\ \cancel{2}}\ \boxed{3\ \cancel{4}}\ \boxed{5\ }\dots\ \cancel{2m}$

$1 = 1*\mathbf{2}-1$ *donc 1 est le premier nombre impair ;*

$3 = 2*\mathbf{2}-1$ *donc 3 est le second nombre impair ;*

$5 = 3*\mathbf{2}-1$ *donc 5 est le troisième nombre impair ;*

Nous avons ainsi besoin de multiplier par deux et retirer un au rang afin d'obtenir le nombre impair correspondant : 1 est le premier nombre impair, 3 le second, 5 le troisième...

Nous n'avons pas besoin de modulo sur cette formule car le numéro du survivant parmi *m* gobelins est plus petit ou égal à *m.* En effet :

$S(m) \leq m$

donc

$2*S(m) \leq 2m$

donc

$2*S(m) - 1 \leq 2m$

Exemple :

Pour 20 gobelins, nous avons :

$S(20) = S(20 / 2) + 1$

$S(20) = S(10) * 2 + 1$

or :

$S(10) = 5$

donc :

$S(20) = 5 * 2 - 1$

$S(20) = 11$

Le survivant quand il y a 20 gobelins est donc le 11ème gobelin du cercle. (2)

<u>*c- La formule finale soit déterminer S(m) en fonction de m*</u>

Théorème :

Pour m gobelins, le rang du survivant est égal au nombre de gobelins multiplié par 2, soustrait de la plus grande puissance de 2 possible et augmenté de 1 : *$S(m)= 2m – 2^k + 1$,* avec k le plus grand entier tel que : $2^k \leq 2m$.

Démonstration :

Pour $m \geq 2$, Soit P(m) la propriété **$S(m) = 2m – 2^k + 1$.**

Initialisation pour m = 2 :

On sait de façon évidente, que pour un cercle de deux gobelins, le survivant est le premier du cercle soit $S(2) = 1$.
De plus, la plus grande puissance de 2 inférieure à 2*2 est 4 donc la formule donne :

$2*2 – 4 + 1 = 1$

Donc la propriété P(m) est vraie pour m = 2.

Hérédité :

Supposons P(m) vraie a un rang m donné.

Si m+1 est une puissance de 2, alors il existe un entier k tel que $m+1= 2^k$,
donc $2*(m+1)=2^{k+1}$,
donc $S(m+1)=1$ (3) et la formule donne aussi $2*(m+1) – 2^{k+1} + 1 = 1$,
donc P(m+1) est vraie.

Si m+1 n'est pas une puissance de 2, alors 2^k est la plus grande puissance de deux que l'on peut enlever à 2*m et :

$S(m+1) = (S(m) + 2)$ modulo $(m+1)$

Or par hypothèse de récurrence : $S(m) = 2m – 2^k +1$

$S(m+1) = (2m – 2^k + 1 + 2)$ modulo $(m+1)$

$S(m+1) = (2(m + 1) – 2^k + 1)$ modulo $(m+1)$

donc P(m+1) est vraie.
Ainsi dans les deux cas, la propriété est vraie au rang m+1.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, $S(m) = 2m – 2^k +1$ est vraie pour tout entier m supérieur ou égal à deux.

Exemple :

Pour 10 gobelins, nous avons :

2*10=20
La plus grande puissance de 2 inférieure à 20 est $16=2^4$ donc :

$S(10) = 10*2 – 2^4 + 1$

S(10) = 20 – 16 + 1
S(10) = 5

Pour 10 gobelins, le survivant est donc bien le 5ème gobelin du cercle.

III-Quand les gobelins comptent jusqu'à deux en binaire

a-Introduction au binaire

Lorsqu'on écrit un nombre normalement, on l'écrit en base 10, c'est-à-dire que l'on peut décomposer l'écriture du nombre en puissances de 10 :

Exemple :

$472 = 4*100 + 7*10 + 3$
$472 = 4*10^2 + 7*10^1 + 3*10^0$

Quand on écrit en base 2, on décompose l'écriture en puissances de 2 :

Exemple :

$472 = 1*256 + 1*128 + 1*64 + 0*32 + 1*16 + 1*8 + 0*4 + 0*2 + 0*1$
$472 = \mathbf{1}*2^8 + \mathbf{1}*2^7 + \mathbf{1}*2^6 + \mathbf{0}*2^5 + \mathbf{1}*2^4 + \mathbf{1}*2^3 + \mathbf{0}*2^2 + \mathbf{0}*2^1 + \mathbf{0}*2^0$
472 s'écrit donc 111011000 en base 2.

Lorsqu'on écrit en base 2, on ajoute généralement des 0 à gauche du nombre pour obtenir un nombre précis de chiffres (8 bits = 8 chiffres ; 16 bits = 16 chiffres)

Exemple :

$12 = 1*8 + 1*4 + 0*2 + 0*1$
12 s'écrit donc 1100, mais en 8 bits on rajoute des 0 à gauche pour avoir 8 symboles :12 s'écrit donc 00001100 sur 8 bits.

b-Déterminer S(m) en fonction de l'écriture de m en binaire

En binaire, nous avons remarqué que la formule finale expliquait cette propriété :

En binaire, appliquer la formule finale est donc équivalent à prendre le 1 le plus à gauche, et à le mettre à droite.

Exemple :

Pour 10 gobelins :

$10 = 1*8 + 0*4 + 1*2 + 0*1$

10 s'écrit donc donc 1010 en binaire.

Pour calculer le rang du survivant quand il y a 10 gobelins, on prend le 1 le plus à gauche :
***1**010*

Puis on le met a droite :
*010**1***

La réponse est donc :
$\mathbf{0}*8 + \mathbf{1}*4 + \mathbf{0}*2 + \mathbf{1}*1 = 5$

Le survivant est bien le 5ème quand il y a 10 gobelins.

Cette propriété peut être expliquée facilement :

Lorsqu'on multiplie le nombre de gobelins par deux, on décale tous les chiffres de 1 cran vers la gauche.

Ensuite, retirer la puissance de deux la plus grande revient à retirer le 1 le plus à gauche.

Enfin, lorsqu'on augmente de 1 le résultat, on remplace le 0 le plus à droite apparu grâce au décalage, par un 1.

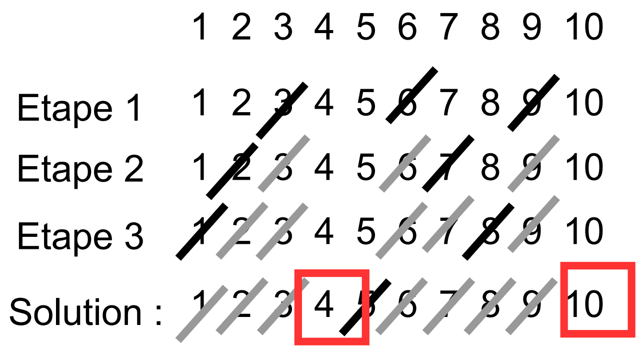
Combiner toutes ses étapes revient donc à prendre le 1 le plus à gauche, et à le mettre à droite.

IV-Quand les gobelins comptent jusqu'à trois, c'est à dire quand n = 3

Quand les gobelins comptent jusqu'à 3, il y a deux survivants, notés $S_1(m)$ et $S_2(m)$.

Exemple :

Pour 10 gobelins :



Survivants pour 10 gobelins lorsqu'ils comptent jusqu'à 3

Ainsi, $S_1(10)=4$ et $S_2(10)=10$.

Théorème :

Pour *m+1,* les rangs des survivants gobelins sont égaux aux rangs des survivants pour *m* gobelins plus *3*.

Pour calculer le numéro du premier survivant: $S_1(m+1) = (S_1(m) + 3) \text{ modulo } m.$
Pour calculer le numéro du second survivant: $S_2(m+1) = (S_2(m) + 3) \text{ modulo } m.$

Démonstration :

1 2 3 4 5 … m+1

Lorsqu'il y a *m+1* gobelins, nous devons en tuer un pour atteindre un cercle où il y a *m* gobelins.

1 2 $\cancel{3}$ 4 5 …m+1

Ensuite, nous continuons comme s'il y avait *m* gobelins, mais on compte à partir du premier gobelin mort (le troisième).

1 2 $\cancel{3}$ $\boxed{4\ 5}$ …m+1

4 – 1 = 3

On a donc un décalage de 3 entre m gobelins et m+1.
Le modulo permet de revenir au début : quand il y a 16 gobelins, le *17ème* ne peut pas mourir, c'est le *1er* qui meurt.

Exemple :

Pour 11 gobelins, nous avons :

$S_1(11) = (S_1(10) + 3)$ *modulo 11*

et

$S_2(11) = (S_2(10) + 3)$ *modulo 11*

or :

$S_1(10) = 4$

et

$S_2(10) = 10$

donc :

$S_1(11) = (4 + 3)$ *modulo 11*
$S_1(11) = 7$ *modulo 11*
$S_1(11) = 7$

et

$S_2(11) = (10 + 3)$ *modulo 11*
$S_2(11) = 13$ *modulo 11*

comme 13 est plus grand que 11, on applique le modulo :

$S_2(11) = 2$

Les deux survivants lorsqu'il y a 11 gobelins sont donc les 2ème et 7ème gobelins du cercle.
(4)

V-Conclusion

Nous sommes donc en mesure de connaître les rangs des survivants quand les gobelins comptent jusqu'à *2* sans avoir à calculer les rangs précédents ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils comptent jusqu'à *3* où nous devons alors connaître les rangs des survivants précédents.

De plus, la formule permettant de calculer le rang des survivants quand il y a *m+1* gobelins grâce au rang du survivant quand il y a *m* gobelins fonctionne quel que soit le nombre *n* jusqu'au quel les gobelins comptent, à condition de l'adapter en remplaçant le *+2* (ou *+3*) par *+n*.

Notes d'édition

(1) Pour le modulo, cette phrase est un exemple et non une définition.

(2) Dans cet exemple, il y a une erreur.
La formule trouvée précédemment est S(2m)=2S(m)-1, donc dans l'exemple, S(20)=S(20/2)-1 et pas +1 comme il est écrit. Alors S(20)= 5*2-1=9, et on trouve que le survivant, quand il y a 20 gobelins, est le 9ème sur le cercle.

(3) Il faudrait plutôt comprendre : « Or, quand m+1 est une puissance de 2, S(m+1)=1, et la formule donne 2*(m+1)-2^(k+1)+1=1, donc P(m+1) est vraie ».

(4) Il est dommage que l'article ne présente pas en exemple le cas m=40 gobelins de l'énoncé initial du sujet.