La marche de l’ivrogne

Alice Désidéri Camille Lacaule Luc Darné Guillaume Camelot
Baudoin Auzou Antoine Carof Bénédicte Perez Perrine Enjalbert
Aurélie Verdon Fanny Patin, Mélodie Durnez.

Lycées Montaigne et Sud Médoc Bordeaux

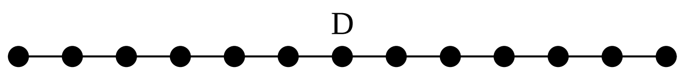
Problème

Après avoir bien bu, Monsieur Pierre, ivre, veut quitter le bistro pour rentrer chez lui. Quelle probabilité a-t-il d’arriver à son but sachant qu’il évolue au hasard dans un réseau de rues perpendiculaires ?

1) EN 1 DIMENSION :

Pour commencer nous avons décidé de faire évoluer notre ivrogne sur une droite avec à chaque fois une chance sur deux d‘aller à droite et une chance sur deux d’aller à gauche. Nous avons observé les résultats pour différentes distances entre le point de départ et le point d’arrivée.
En une étape, il peut arriver à deux points, en deux étapes à trois points, en trois étapes à quatre points, etc…

On représente le nombre de chemins possibles de l’ivrogne pour arriver à un point donné.



Après 1 pas					1	0	1				
Après 2 pas				1	0	2	0	1			
Après 3 pas			1	0	3	0	3	0	1		
Après 4 pas		1	0	4	0	6	0	4	0	1	
Après 5 pas	1	0	5	0	10	0	10	0	5	0	1

On reconnaît (pour ceux qui le connaissent) la structure du triangle de Pascal.

Il se compose d’une droite en haut du schéma représentant la route de l’ivrogne. On fixe sur cette droite deux points D et A correspondant respectivement aux points de départ et d’arrivée. En dessous de cette droite, nous avons écrit le nombre de chemins qui mènent à chacun des points en fonction du nombre de pas effectués par l’ivrogne.

En 1 pas, il peut aller soit à droite soit à gauche.

En 2 pas, 1 chemin pour 2 fois à gauche, 1 chemin pour 2 fois à droite et 2 chemins pour 1 des 2 fois à gauche et l’autre fois à droite.

Quand l'ivrogne arrive au niveau du point A, il suffit de faire la somme des nombres inscrits sur la droite correspondante, la probabilité d'arriver à ce point A est alors le quotient du nombre correspondant à A par cette somme..
La somme des nombres de chaque ligne correspond à une puissance de 2 (ligne 0 => 2^0 , ligne 2 => 2^2).
Par exemple en trois coups, l'ivrogne a pour probabilités d'arriver aux points de gauche à droite : $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$.
Mais le problème est que pour connaître le nombre de chances qu'a l'ivrogne de revenir à son point de départ en 351 coups, il faut alors déterminer la ligne 351 du triangle de Pascal. C'est pourquoi il a fallu trouver une formule générale qui nous permettait de trouver chaque nombre du triangle. Pour ceci, afin de faciliter la formule, nous avons utilisé plusieurs nombres :

d = distance à l'origine = valeur absolue de l'abscisse x (en 1 dimension)
n =nombre de coups
t = (n – d) / 2
Il faut remarquer que n et d sont toujours de la même parité : par exemple en 5 coups il ne peut être que sur les points d'abscisses 1, 3 ,5 (ou -1, -3, -5)
Or si n < d alors c'est impossible
Si d = n alors la probabilité d'y arriver est de 1 / 2^n
Si n>d alors, elle est de $\frac{n!}{t!(n-t)!}\frac{1}{2^n}$
Voici la preuve :
Pour arriver en (n+1) coups au point à distance (d+1) de l'origine, l'ivrogne vient des points à distance d ou d+2. On suppose la formule vraie pour n étapes
La probabilité cherchée est la somme des probabilités correspondantes multipliée par ½ donc on calcule !
$\frac{n!}{(n-t)!t!}+\frac{n!}{(n-t+1)!(t-1)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1-t)!t!}$ par réduction au même dénominateur.
On nous a dit que ce type de raisonnement s'appelait une « récurrence ».

(*Note de l'éditeur : cette démonstration par récurrence est incomplète, il manque une phase d'initialisation, la formule est cependant valide*)

2) EN 2 DIMENSIONS :

A) Après nous être intéressés au trajet de notre ivrogne sur une droite, nous avons fait la même étude sur un plan, dans un réseau cartésien, en imaginant que l'ivrogne ne revient pas sur ses pas.

Nous sommes donc partis d'un point D, et dans un carré, nous avons tracé et compté tous les chemins possibles que cet ivrogne a pour aller en un point quelconque du plan, et nous nous sommes aperçus que ce carré était divisé en quatre triangles identiques, et qui correspondent au triangle de Pascal.

. Au point de départ, il a 1 chance sur 4 d'aller au nord (vers le haut de la feuille), 1 chance sur 4 d'aller au sud (vers le bas de la feuille), 1 chance sur 4 d'aller à l'ouest (vers la gauche), et enfin il a 1 chance sur 4 d'aller à l'est (vers la droite).

Ensuite, il n'a plus que deux directions puisqu'il ne revient pas sur ses pas. Cela donne le tableau suivant :

									1									
								9	1	9								
							36	8	1	8	36							
						84	28	7	1	7	28	84						
					126	56	21	6	1	6	21	56	126					
				126	70	35	15	5	1	5	15	35	70	126				
			84	56	35	20	10	4	1	4	10	20	35	56	84			
		36	28	21	15	10	6	3	1	3	6	10	15	21	28	36		
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		36	28	21	15	10	6	3	1	3	6	10	15	21	28	36		
			84	56	35	20	10	4	1	4	10	20	35	56	84			
				126	70	35	15	5	1	5	15	35	70	126				
					126	56	21	6	1	6	21	56	126					
						84	28	7	1	7	28	84						
							36	8	1	8	36							
								9	1	9								
									1									

Note du relecteur : L'ivrogne s'éloigne systématiquement du point de départ, c'est ainsi que les élèves ont restreint le problème dans cette partie

A partir de là, nous nous sommes intéressés aux chances qu'a l'ivrogne d'arriver à un endroit plus ou moins éloigné de son point de départ en posant comme condition qu'il n'a que trente pas pour y arriver. Ainsi, nous avons réalisé des tableaux probabilistes pour déterminer le pourcentage de chances que notre ivrogne a d'arriver. Voici donc les résultats que l'on a obtenus :

- distance de 4 pas entre les deux points : 70 % de chances de ne pas arriver
- distance de 6 pas entre les deux points : 80 % de chances de ne pas arriver
- distance de 8 pas entre les deux points : 90% de chances de ne pas arriver
  On remarque donc que plus la distance est grande plus la probabilité d'arriver diminue.

Note de l'éditeur: Ces résultats sont surprenants, on remarque sur les tableaux que le nombre de chemins amenant à des points à distance 4 ne sont pas égaux pour tous les points.
Pour une distance de 4 pas, la probabilité d'arriver en 4 pas est de 1/16 soit 6,25%.
Les résultats ci-dessus sont faux ou correspondent à des conditions non précisées, peut-être ces résultats correspondent-ils à la partie suivante ?

B) Cas général : On suppose que l'ivrogne peut revenir sur ses pas.

On a la même répartition en quatre zones identiques.
Par exemple au bout de 4 étapes, il peut se trouver sur les points suivants avec le nombre de chances (pour avoir la probabilité il faut diviser par256)

				1				
			4		4			
		6		16		6		
	4		24		24		4	
1		16		36		16		1
	4		24		24		4	
		6		16		6		
			4		4			
				1				

On a voulu trouver une formule plus générale qui permettait de trouver le nombre de chances qu'avait ce même ivrogne d'arriver sur un point donné en n étapes sans être obligé de refaire constamment ce tableau.

Nous sommes donc partis sur le même raisonnement que la dernière fois, et voici ce qu'il en a résulté.
Nous avons utilisé de nouveau des lettres :
x et y sont les coordonnées du point.
On se limite au cas où elles sont positives puisque le tableau est symétrique.
Si n < x+y, alors il n'a aucune chance de parvenir à ce point.
Si $n \geq x+y$, alors l'ivrogne peut se trouver sur un point tel que n et x+y ont la même parité avec la probabilité :

$$\frac{1}{4^n}\frac{n!}{\left(\frac{n+x+y}{2}\right)!\left(\frac{n-x-y}{2}\right)!}\frac{n!}{\left(\frac{n+x-y}{2}\right)!\left(\frac{n-x+y}{2}\right)!}.$$

Pour la démontrer, on suppose qu'elle est vraie pour n étapes et on passe à (n+1) étapes en ajoutant les quatre probabilités qui entourent le point visé multipliées par ¼.
C'est un peu plus compliqué que pour une dimension mais on y arrive !

Note de l'éditeur : Cette formule n'a pas été vérifiée