

S'échapper du manège diabolique

Histoire d'une puce

2019 - 2020

Auteurs : Grégoire FERTON, Pierre-Alexandre PAQUET, Eliott SEURET (Seconde),
Adélie BENHAÏM (Première), Jules BIOULAC (Première, Lycée Chaptal)

Professeur : Ariane MARTIN, Doctorante, ENS Paris-Saclay

Établissement : Lycée Carnot, Paris

Chercheur : Amic FROUVELLE, Université Paris-Dauphine

Présentation du sujet : Une puce se trouve sur un plateau circulaire et s'y déplace en faisant des petits sauts. Entre chaque saut de puce, un robot fixé à l'extérieur du plateau peut le faire tourner. La puce ne peut s'échapper du plateau que si elle atteint le bord en dehors des bras du robot. Dans ce sujet, nous étudierons les possibilités de victoire de la puce et du robot en fonction des paramètres du problème ainsi que de la position initiale de la puce sur le plateau.

Sommaire

1	Introduction	2
1.1	Les règles	2
1.2	Problématiques	2
1.3	Des exemples	3
2	Premiers résultats	4
2.1	La puce peut toujours revenir exactement au centre	4
2.2	Cas où la puce ou le robot gagne	5
3	Les zones	6
3.1	Y a-t-il des zones dans lesquelles la puce / le robot gagne ?	6
3.2	Connaître le nombre de zones	9
3.3	Les zones dans le cas où la condition du 2.2.1 n'est pas respectée ($t \leq \pi s$)	15
4	Conclusion	16
	Remerciements	17
	Annexe	18
	Notes d'édition	20

1 Introduction

1.1 Les règles

Le problème se déroule sur un plateau circulaire de rayon $R = 1$. Une puce apparaît aléatoirement sur celui-ci en ayant pour objectif d'en sortir. Un robot fixé à l'extérieur du plateau est muni de deux bras de longueur t au bord du plateau, qui bloquent tout passage de la puce. Le robot peut faire tourner le plateau de n'importe quel angle entre $-t$ et t .

- La puce effectue des sauts de longueur égale à s . Elle gagne si elle sort du plateau.
- Le robot gagne s'il arrive à forcer la puce à rester sur le plateau.

On définit $t = \frac{\pi}{n}$ (une proportion du demi cercle) avec n un nombre réel tel que $n \geq 1$. La longueur du saut de la puce s est telle que $0 < s < 1$. Si la puce arrive exactement au bord du disque ou sur les points L et N (correspondants aux bouts des bras du robot) de la Figure 1, elle a aussi gagné.

NOTATION : On note M le corps du robot, c'est à dire le milieu de l'arc de cercle compris entre L et N . On définit également P comme étant le point le plus éloigné de M sur le bord du plateau.

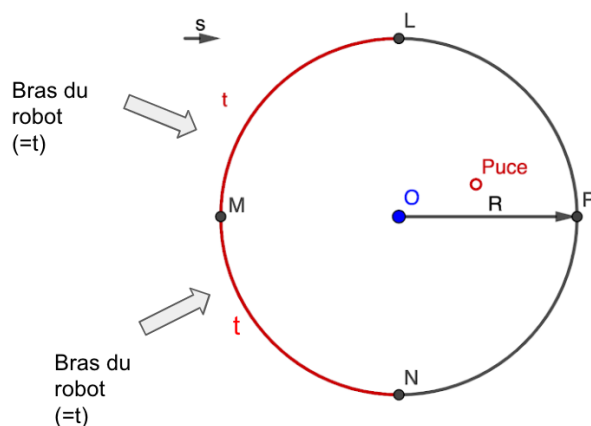


FIGURE 1 – Exemple

1.2 Problématiques

Nous allons donc étudier les comportements possibles pour la puce et le robot :

- La puce peut-elle toujours revenir au centre du plateau ?
- Y a t-il des cas où la puce peut toujours gagner ?
- Y a t-il des cas où la puce ne peut jamais gagner ?
- Quelles sont les positions de départ pour lesquelles la puce a une stratégie pour s'échapper ? Quelles sont ses stratégies ?
- Quelles sont les zones d'apparition de la puce pour lesquelles le robot peut gagner ? Quelles sont ses stratégies ?
- Que se passe t-il pour s très petit ?

1.3 Des exemples

On prendra pour ces exemples, dont les stratégies ne sont pas forcément optimales, le cas où $R = 1$, $s = \frac{1}{5}$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

1.3.1 Exemple 1 : La puce gagne

Les stratégies énoncées ici ne sont pas forcément des stratégies optimales.

Lors de l'étape 1 (Figure 2b), au tour de la puce, elle effectue un saut de longueur s et se rapproche du bord. Au tour du robot, (Figure 2c), il fait tourner le plateau d'un angle t . À l'étape 2, au tour de la puce (Figure 2d), elle sort du plateau et gagne.

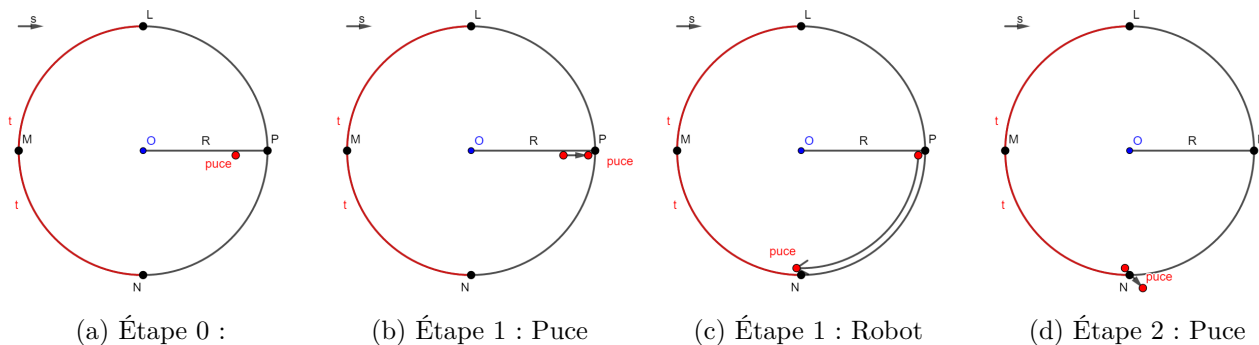


FIGURE 2 – Exemple où la puce gagne ($R = 1$, $s = \frac{1}{5}$, $t = \frac{\pi}{2}$)

1.3.2 Exemple 2 : La puce perd

Dans cet exemple, la puce commence au centre du plateau. La puce adopte ici une méthode qui consiste à faire des sauts de taille s parallèles à $[OP]$. Le robot essaie de rapprocher la puce le plus possible du point M .

Par exemple, lors de l'étape 1 (Figure 3b), la puce joue, et le robot fait tourner le plateau dans le sens horaire et d'angle t (Figure 2c) et ainsi de suite. Au bout de l'étape 4 (Figures 3h et 3i), la puce se retrouve au centre, donc au point de départ. Cette situation se répétera à l'infini, donc, la puce a perdu.

Inspirés par ces exemples, on cherche à trouver des résultats plus approfondis comme les situations dans lesquelles la puce ou le robot peut toujours gagner. Nous cherchons également à voir si la puce peut toujours revenir au centre O .

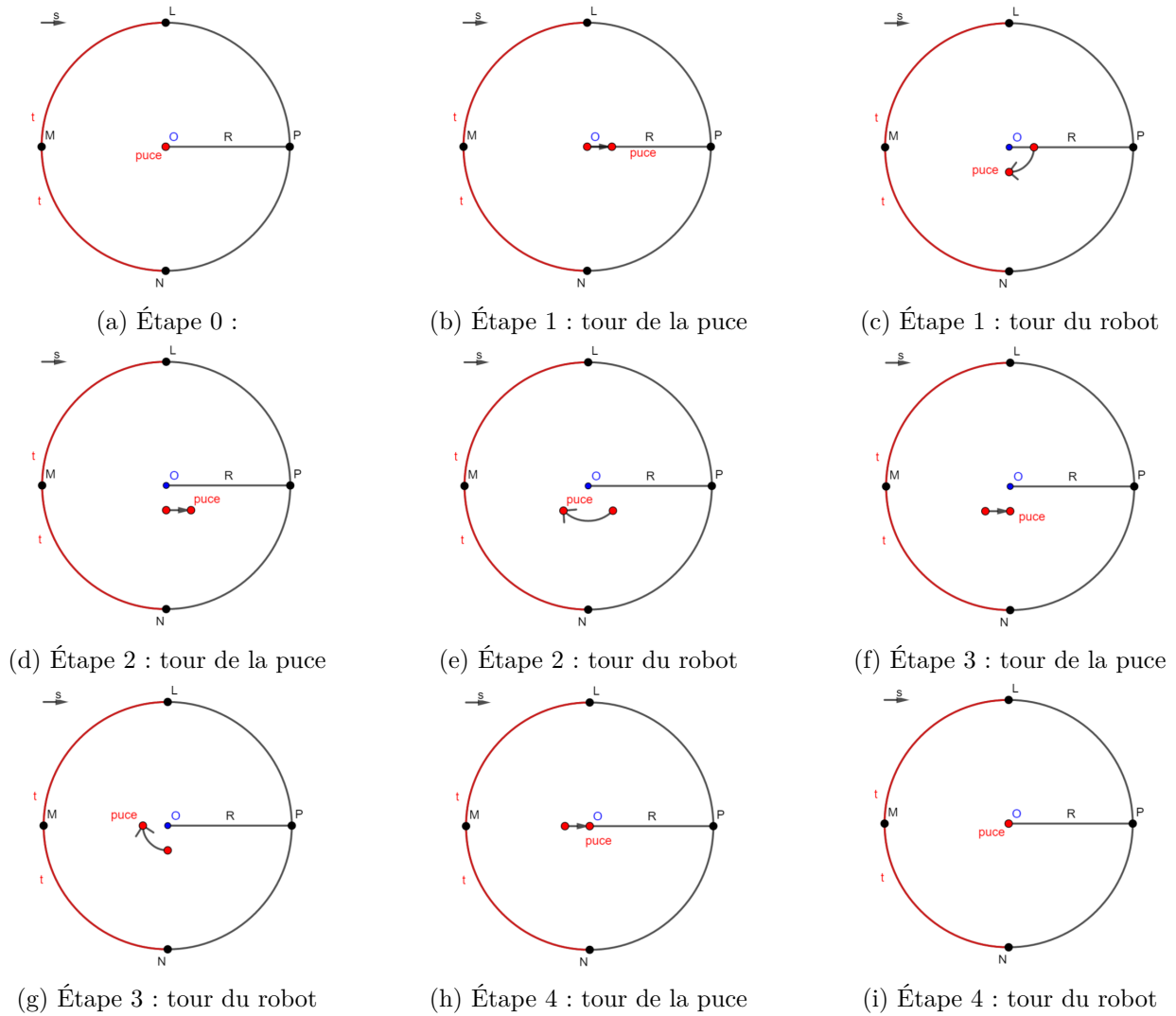


FIGURE 3 – Exemple où la puce perd ($R = 1$, $s = \frac{1}{5}$, $t = \frac{\pi}{2}$)

2 Premiers résultats

2.1 La puce peut toujours revenir exactement au centre

Avant une rotation du plateau par le robot, la puce se trouve à une distance d du centre O . Le robot effectue une rotation de centre O de $\frac{\pi}{2}$ sur la Figure 4a. Or, lors d'une rotation, la distance entre le point d'origine et le centre de rotation est conservée. Donc, le robot ne pourra jamais éloigner la puce du centre du disque.

La puce peut à chaque saut sauter dans la direction de O avec un saut de taille s . Si au départ elle se trouve à la distance d de O , au bout de $\lfloor \frac{d}{s} \rfloor - 1$ étape(s), elle se trouvera à une distance inférieure ou égale à $2s$ de O [1]. Il lui faudra deux sauts de longueur s pour atteindre le centre O . En effet, si on trace deux cercles de centres $Puce$ et O et de rayon s comme dans la Figure 4b, il existe un ou deux points, ici les points $Puce_1$ et $Puce_2$ étant à une distance s des deux centres. Il faut donc faire un saut de longueur s pour atteindre l'un de ces deux points et un deuxième pour atteindre le point O .

Elle atteint donc le centre du disque en $\lfloor \frac{d}{s} \rfloor - 1 + 2$, soit $\lfloor \frac{d}{s} \rfloor + 1$ sauts au minimum (car elle peut atteindre le centre en effectuant plus de sauts).

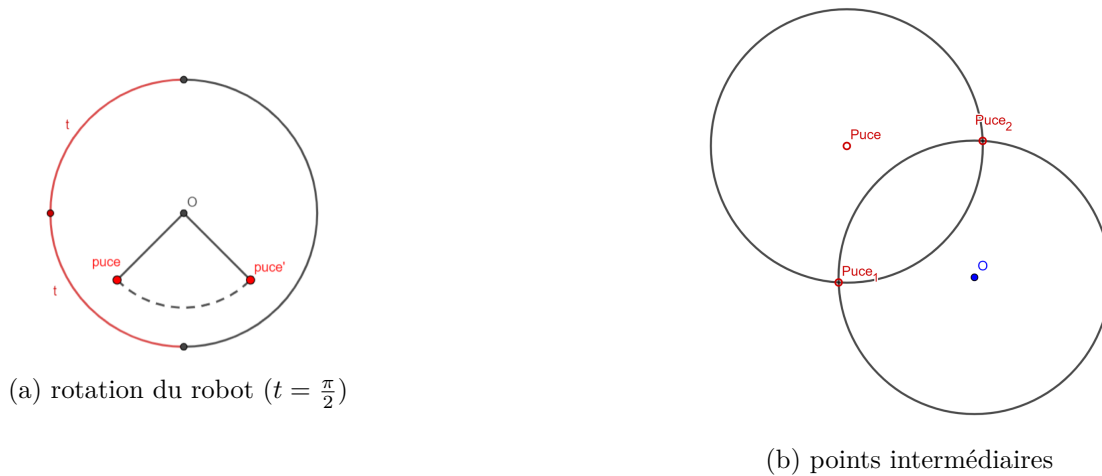


FIGURE 4 – Preuve que deux coups permettent d'atteindre O

2.2 Cas où la puce ou le robot gagne

2.2.1 Cas où la puce peut toujours gagner

Dans la Figure 5, on peut voir que la puce gagne si elle suit la stratégie suivante : la puce avance toujours droit devant elle le long d'un des rayons du cercle de la plus grande longueur possible. La stratégie du robot consiste à toujours ramener la puce le plus près possible du rayon $[MO]$. Avec ces stratégies on remarque que la puce doit parcourir une distance R , c'est à dire 1 pour gagner (on admet que la puce part du centre du cercle car comme on l'a vu elle peut de toute façon toujours y aller). Comme la puce parcourt à chaque coup une longueur s , au final elle gagnera en $\frac{1}{s}$ coups [2]. Pour le robot on simplifie la situation et l'on admet qu'il gagne dès lors que la puce est comprise dans le secteur NOL . Pour gagner il doit donc faire parcourir l'angle β sur la Figure 5 à la puce et cela en la faisant parcourir l'angle t à chaque coup. On remarque que l'angle β est égal à l'angle $\pi - t$. Le robot gagne donc en : $\frac{\beta}{t} = \frac{\pi - t}{t}$ coups.

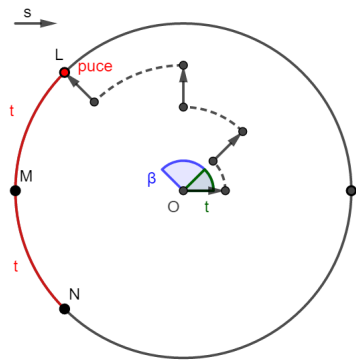


FIGURE 5 – Cas où la puce peut toujours gagner

Ainsi pour que la puce gagne il faut que son nombre de coups nécessaires pour gagner soit inférieur au nombre de coups nécessaires au robot pour gagner, ce qui se traduit en une inéquation :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} - 1 &\leq \frac{\pi - t}{t} \\
\Leftrightarrow \frac{t}{s} - t &\leq \pi - t \\
\Leftrightarrow \frac{t}{s} &\leq \pi \\
\Leftrightarrow t &\leq \pi s
\end{aligned}$$

REMARQUE : On doit soustraire 1 au nombre de coups de la puce car c'est elle qui commence à bouger, elle a donc un coup d'avance sur le robot.

On a donc montré que la puce gagne peu importe où elle apparaît sur le manège si les conditions initiales vérifient : $t \leq \pi s$ [3].

Maintenant qu'on a quelques résultats, on peut en déduire qu'il est plus intéressant de travailler hors des cas où la puce peut toujours gagner quelque soit sa position initiale. Dans la suite, on se place donc dans le cas où $t > \pi s$. On va maintenant étudier les positions initiales de la puce pour lesquelles la puce, ou le robot, peut gagner.

2.2.2 Cas où le robot gagne

On peut voir qu'il n'existe pas de cas où le robot gagne peu importe la position initiale de la puce. En effet, si la puce apparaît à une distance inférieure ou égale à s du bord, elle gagne au premier coup à l'aide d'un saut de longueur s .

De plus, la puce gagne si elle arrive exactement au bout des bras du robot. Dans le cas où les bras du robot sont de longueur $t = \pi$, les bouts des bras du robot vont donc se rejoindre en un point P . Selon nos hypothèses, la puce peut donc sortir si elle arrive exactement au point P .

On se demande donc si il n'y a pas d'autres endroits que celui dont on vient de parler où si la puce y apparaît elle a une chance d'échapper au robot.

3 Les zones

3.1 Y a-t-il des zones dans lesquelles la puce / le robot gagne ?

On définit comme zone gagnante pour la puce, la surface dans laquelle, si elle apparaît, elle peut gagner. De même, on définit comme zone gagnante pour le robot, la surface dans laquelle, si la puce apparaît, elle perd.

3.1.1 Les zones de la puce dans un exemple

On prend pour exemple le cas $R = 1$, $s = \frac{1}{5}$, $t = \frac{\pi}{2}$. On peut, puisque le robot n'entoure pas entièrement le disque, déjà placer une zone dans laquelle la puce gagne. Comme la puce effectue des sauts de longueur s , si elle se trouve à une distance inférieure ou égale à s du bord libre, elle peut sortir en un saut. Cela forme donc une "Zone 1" (en gris sur la Figure 6b) qui correspond à la zone où la puce gagne du premier coup.

Ensuite, on essaye de voir à partir d'où la puce peut gagner si elle n'apparaît pas dans la Zone 1. On cherche une éventuelle "Zone 2" où la puce gagnerait en deux coups à partir de cette zone. On peut voir que si la puce arrive à sortir au deuxième coup, c'est qu'après le premier coup, elle était forcément dans la Zone 1. En effet cette zone se trouve à une distance maximale de saut de la puce qui est s . Pour que la puce y arrive, il faut qu'elle effectue un saut qui l'emmènerait dans un endroit où si le robot fait tourner le disque de t , elle se retrouverait dans la Zone 1. Ici, la Zone 2 est tracée comme une section de disque de centre P et de rayon $2s$. Si la puce est dans cette Zone 2, elle saute vers P . Alors pour toute rotation inférieure ou égale à t , sa nouvelle position se situe dans la Zone 1. Si elle n'y apparaît pas, elle ne pourra

pas atteindre la zone en pointillé de la Figure 6c et ne pourra donc pas se retrouver dans la Zone 1 après la rotation du robot. Donc le robot peut la sortir du reste de la Zone 1 ou l'empêcher de l'atteindre.

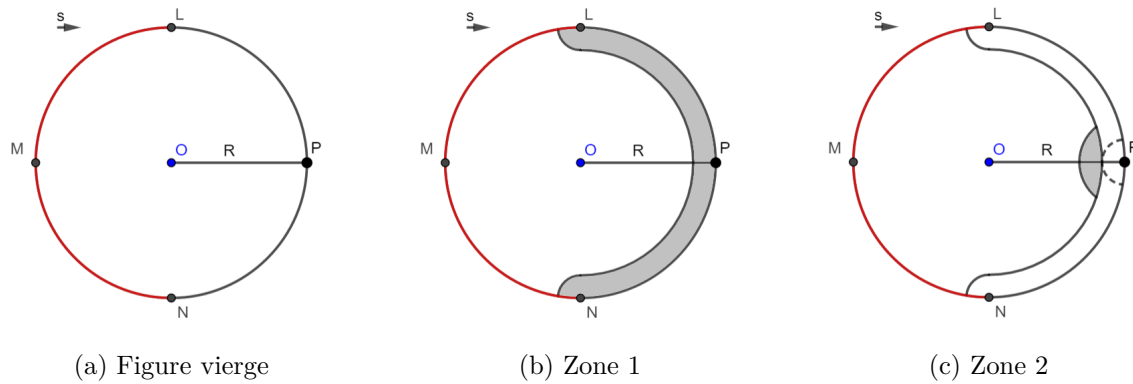


FIGURE 6 – Exemple concret ($R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{2}$)

On travaillera plus tard ce qu'il se passera au bout du troisième coup.

3.1.2 Les zones du robot dans un exemple

Ici, on traite encore le cas $R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{2}$.

On peut aussi essayer de construire les zones du point de vue du robot, en étudiant les cas où le robot gagne. Pour ça, on étudie tous les déplacements possibles de la puce dans les zones des Figures 7. Rappelons que le robot a intérêt à éloigner la puce de la sortie, et donc de rapprocher la puce du segment $[OM]$.

Nous étudierons la moitié gauche du disque puis la moitié droite.

La moitié gauche du disque

On garde la Zone 1 (Figure 7b) car on sait que la puce gagne si elle se trouve dedans.

Si la puce apparaît dans la moitié gauche du disque (Figure 7c), elle peut se déplacer quelque part dans la partie grisée de la Figure 7d.

Ensuite, le robot fait tourner le plateau de t et la puce se trouve dans la partie grisée de la Figure 7e car tous les points qui sont dans le demi disque gauche se retrouvent sur le segment $[OM]$. De plus, les autres points sont rapprochés le plus possible de ce segment par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ suivant qu'on se trouve en haut ou en bas du disque. On obtient la partie grisée.

La puce peut donc se déplacer et se retrouve dans la zone grisée de la Figure 7f. Le robot fait ensuite tourner le plateau, la puce se trouve donc dans la partie grise de la Figure 7g. On peut voir que la situation se répète et que la puce est bloquée peu importe ce qu'elle va faire, grâce au fait que les Figures 7g et 7i sont les mêmes [4]. Elle a perdu.

On peut en déduire que la puce a perdu quelle que soit sa stratégie.

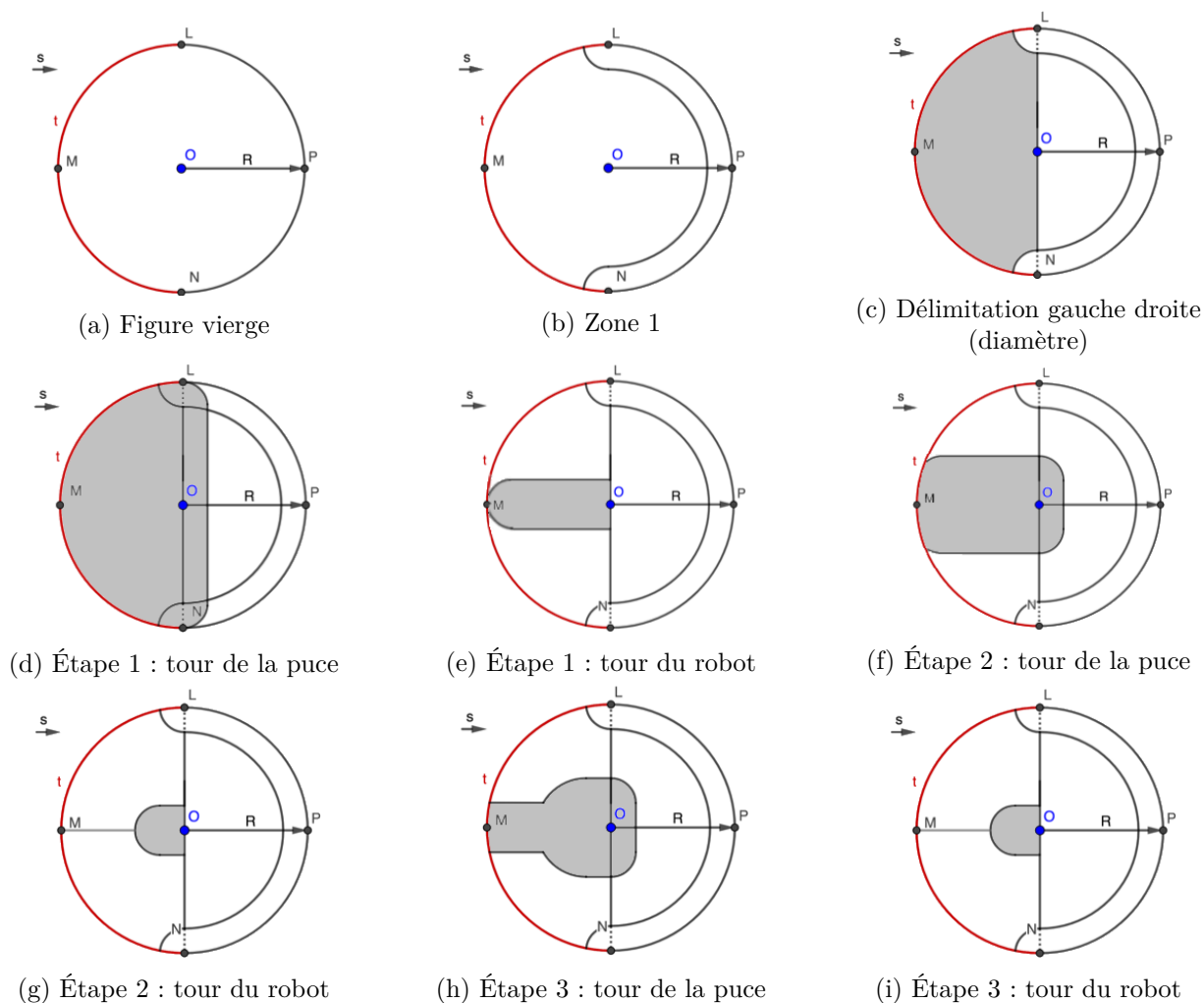


FIGURE 7 – La partie gauche du disque ($R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{2}$)

La moitié droite du disque

On va maintenant chercher les cas dans lesquels, si la puce apparaît dans la moitié droite du disque, le robot gagne. On sait que la puce gagne du premier coup si elle commence dans la Zone 1.

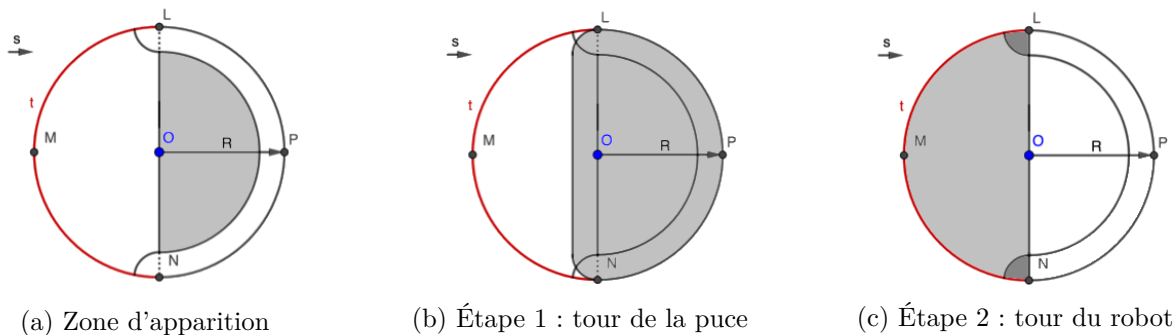


FIGURE 8 – Moitié droite ($R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{2}$)

On étudiera donc la partie droite du plateau en excluant la Zone 1, ce qui correspond à la partie grisée de la Figure 8a (la ligne de limite de la Zone 1 n'en fait pas partie car la puce pourrait gagner du premier

coup —pour rappel, si la puce arrive exactement au bord du disque, elle gagne).

La puce peut donc se déplacer dans la zone grisée de la Figure 8b. Dans cette partie, les bords des zones grisées ne seront pas prises en compte. Lors du coup du robot, la puce se retrouve dans la partie grisée de la Figure 8c. Or on remarque que dans la partie gris-foncée la puce peut gagner, car si elle arrive dans la Zone 1 après le tour du robot, elle gagne. On peut en déduire qu'il y a une zone dans la partie grisée de la Figure 8a qui permet à la puce de gagner au bout de deux coups. Pour le reste, on se retrouve dans le cas de la moitié gauche du disque dans lequel la puce a forcément perdu.

On va reconstituer les coups de la puce et du robot pour voir quelles sont les positions initiales de la puce qui lui permettent de gagner au second coup.

On va donc chercher là où la puce gagne à l'Étape 2. Elle ne gagne que si elle arrive dans la zone grisée de la Figure 9c, après le coup du robot. Cela revient à se trouver dans la zone grise de la Figure 9b avant le tour du robot. Cela revient à dire que la puce était au départ à une distance s de la zone de la Figure 9b. Cela correspond à la zone grise de la figure 9a. On ne prend pas en compte la partie qui est présente dans la Zone 1 (Figure 7b). La zone grisée de la Figure 9a correspond à la Zone 2 déterminée précédemment.

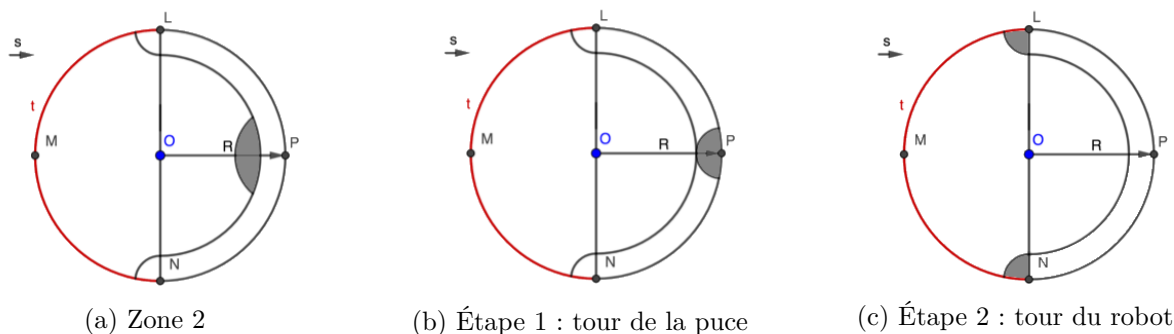


FIGURE 9 – Cas particulier de la Zone 2 ($R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{2}$)

Dans cet exemple, il y a donc deux zones gagnantes pour la puce car on a prouvé qu'elle perd si elle apparaît en dehors de ces zones. De plus, elle a une stratégie lui permettant de gagner si elle apparaît dans ces dernières.

C'est avec cette méthode qu'on peut trouver les zones dans un cas général.

On va donc chercher à connaître le nombre de zones.

REMARQUE : On peut voir que les zones sont symétriques par rapport à la droite (MP) et qu'elles apparaissent au niveau du segment $[OP]$.

3.2 Connaître le nombre de zones

Pour rappel on écrit $t = \frac{\pi}{n}$.

3.2.1 Connaître le nombre de zones lorsque n est un nombre entier

On va maintenant démontrer qu'il y a une relation entre la valeur de t et le nombre de zones. Notre conjecture est que pour $t = \frac{\pi}{n}$, il y a n zones.

On va définir pour cela la fonction $A(i)$ qui donne la valeur de l'angle que forme l'arc de cercle intérieur de la i -ème zone. Cela correspond dans la figure 10 à l'arc de cercle cyan pour l'angle $A(1)$, l'arc de cercle orange pour l'angle $A(2)$ et ainsi de suite.

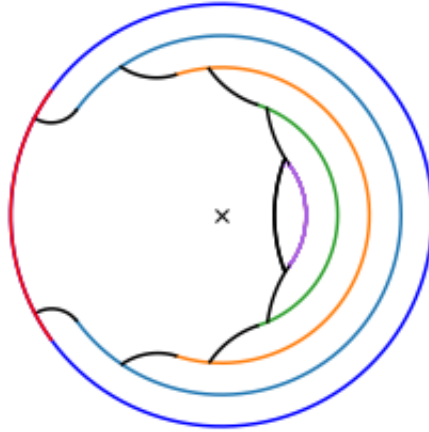


FIGURE 10 – $t = \frac{\pi}{5}$

Pour la 1^{ère} zone, l'angle formé a donc pour valeur $A(1) = 2\pi - 2t$ car 2π correspond à un angle plein et $2t$ à l'angle que forme le robot avec ses deux bras.

Pour la 2^{ème} zone, la première étape ayant été faite, le robot a fait tourner le disque d'un angle t dans un sens ou dans l'autre, ce qui fait que l'on doit soustraire à nouveau $2t$ pour obtenir la valeur de l'angle que forme la 2^{ème} zone. On a donc $A(2) = 2\pi - 2t - 2t = 2\pi - 2t \times 2$.

On peut généraliser ces deux cas pour avoir la formule pour $A(i)$:

$$A(i) = 2\pi - 2t \times i \quad (1)$$

On cherche donc la valeur de i à partir de laquelle $A(i)$ s'annule pour connaître le nombre de zones. En effet, il s'agira de la valeur à partir de laquelle l'arc de cercle intérieur de la zone formera un angle nul, ce qui signifie qu'il s'agira de la dernière zone. Pour cela, on utilise l'équation (1) :

$$\begin{aligned} A(i) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\pi - 2t \times i &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\pi &= 2t \times i \\ \Leftrightarrow 2\pi &= 2 \times \frac{\pi}{n} \times i \\ \Leftrightarrow \frac{i}{n} &= 1 \\ \Leftrightarrow i &= n \end{aligned}$$

Ce résultat montre donc que c'est à partir de la n -ème étape que le robot est en mesure de contrôler l'ensemble du plateau. Cela veut dire que la puce sera dans l'incapacité de sortir du plateau si elle a besoin de plus de n étapes pour s'en aller. Il y a donc n zones quand $t = \frac{\pi}{n}$ [5].

Nous avons réalisé un programme en python permettant de tracer les différentes zones en fonction des paramètres du problème (code en Annexe).

Maintenant, après avoir généralisé le cas où n est un nombre entier, on va essayer de voir ce qui se passe lorsque n n'est pas un nombre entier.

3.2.2 Cas où n n'est pas un nombre entier

Exemples

Tout d'abord, prenons le cas où $R = 1$, $s = \frac{1}{5}$ et $t = \frac{\pi}{2.4}$, illustré par la Figure 11. Il y a donc forcément une Zone 1 et une Zone 2 car $n \in [2; 3]$. On remarque que n n'est pas un nombre entier. Donc l'équation écrite et utilisée dans la partie précédente n'est pas valable, car il y a forcément un nombre entier de zones. On a tracé un schéma avec $\lfloor n \rfloor$ zones (avec $\lfloor n \rfloor$ la partie entière de n , c'est à dire le nombre n sans les décimales) et on a essayé de voir ce qui se passerait si la puce apparaît au bord de la Zone 2 (sans la toucher) sur le segment $[OP]$.

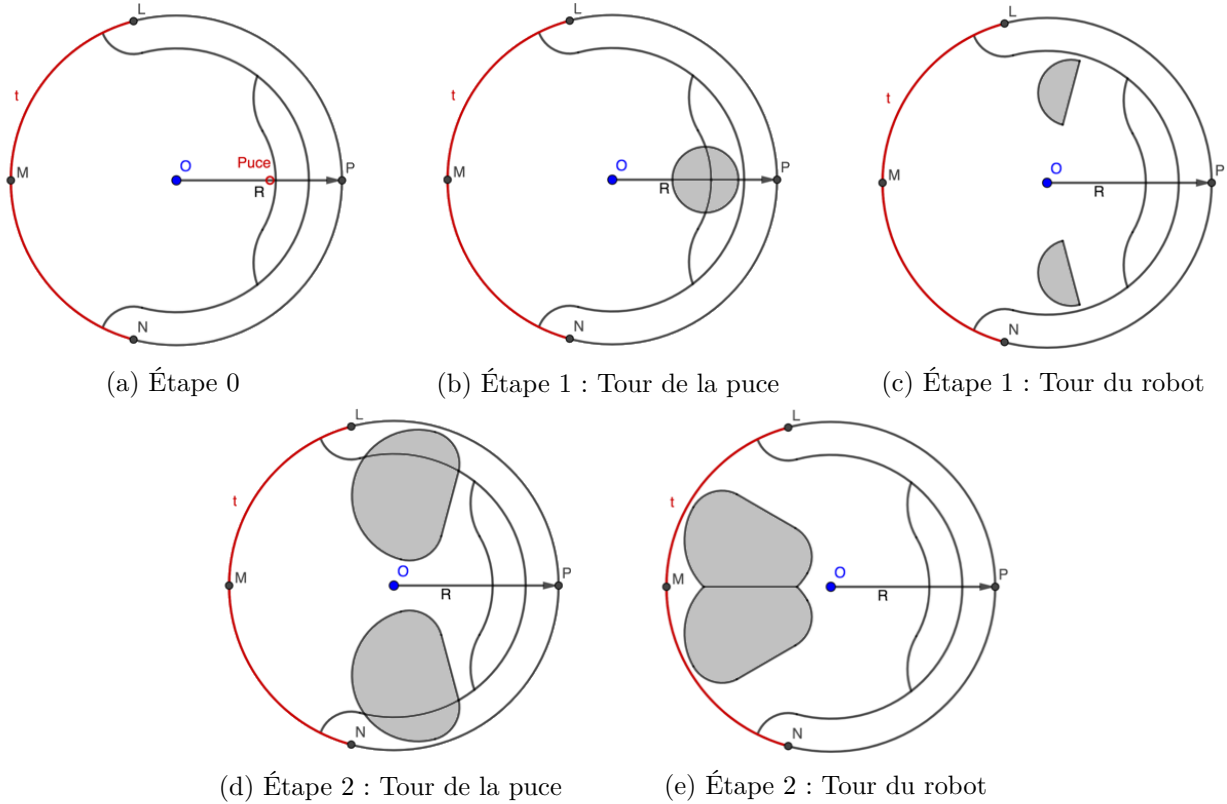


FIGURE 11 – Cas où $R = 1$, $s = \frac{1}{5}$ et $t = \frac{\pi}{2.4}$

On va étudier dans cet exemple tous les sauts possibles de la puce. Suite à son premier saut, la puce peut donc se trouver dans un disque de rayon s autour de sa position initiale (Figure 11b). Le robot, quant à lui, fait tourner le plateau en fonction de la position de la puce : il le fera tourner d'angle t dans le sens horaire si la puce se trouve en dessous de R et dans le sens trigonométrique si elle se trouve au dessus de R . Ce qui divise donc le disque en deux demi-disques qui ont chacun subit une rotation de centre O et d'angle t (Figure 11c). La puce peut donc se déplacer dans la zone grisée de la Figure 11d. Ensuite, le robot fait tourner le plateau d'un angle t (Figure 11e). On remarque que les deux surfaces sur lesquelles la puce peut être se rejoignent. La puce se trouve en dehors de ses zones gagnantes et donc a perdu comme on l'a expliqué auparavant [6].

Comme dit plus tôt, on était au plus proche possible de la Zone 2 sur le segment $[OP]$ (simplifié par un petit espace sur le schéma), on peut en conclure qu'il n'y a pas de Zone 3 avec ces paramètres.

Ensuite prenons le cas où $R = 1$, $s = \frac{1}{5}$ et $t = \frac{\pi}{2.9}$, illustré par la Figure 12. On va étudier cet exemple de la même manière que l'exemple précédent. On place donc la puce à la bordure de la Zone 2. Arrêtons-nous à l'Étape 2 : Tour du robot (Figure 12e). On peut voir que c'est toute la zone représentant les positions possibles de la puce qui subit une rotation de centre O et d'angle t . Ensuite, c'est au tour de

la puce : elle pourra se trouver dans la zone grisée de la Figure 12f. Certains déplacements possibles de la puce sont bloqués par les bras du robot. Cependant, Il est possible pour la puce de sortir du plateau en évitant les bras du robot. En effet, la partie de la zone grisée se trouvant à l'extérieur du disque fait partie des emplacements possibles de la puce et sa forme est due au blocage des bras du robot.

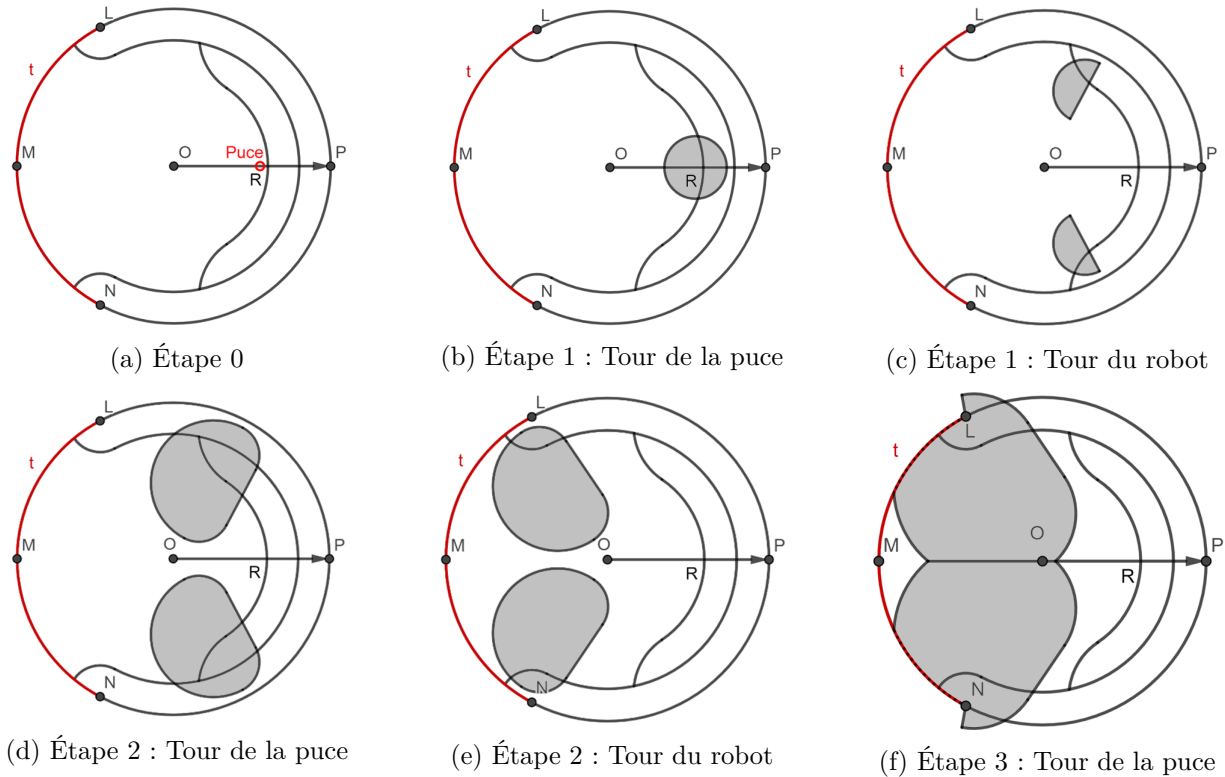


FIGURE 12 – Cas où $R = 1$, $s = \frac{1}{5}$ et $t = \frac{\pi}{2.9}$

Puisque parmi les positions possibles de la puce, il y a des points qui sortent du disque, on peut déduire qu'il y a une Zone 3 avec ces paramètres.

On peut voir que pour un n compris entre 2 et 3, il peut y avoir 2 à 3 zones. On essaiera de voir avec quel n , précisément, une Zone 3 apparaît.

Calcul du n limite

On va essayer à partir d'un cas quelconque (avec $2 \leq n < 3$) de trouver un n minimum pour lequel une Zone 3 apparaîtrait. Pour ce faire, on définit le point K comme étant l'intersection entre le bras du robot et le contour de la Zone 1 (Figure 13a).

Pour simplifier le problème, on va considérer que la puce se déplace toujours suivant un des rayons du plateau en partant d'un point proche de la Zone 2 sur le segment $[OP]$. Elle se trouvera donc toujours sur le segment $[OP_i]$ avec P_i l'image du point P après i rotations d'angle t et de centre O . Il existe une 3^e zone si la puce se trouve dans la Zone 1 au bout de 3 coups. Afin de déterminer cela, nous allons raisonner en utilisant les angles définis ci-dessous [7] :

- α (Figure 13a) : Sur cette figure, on a placé un angle nommé α qui correspond à deux rotations d'angle t à partir de P dans le sens trigonométrique. Sur la Figure 13a, cela correspond à l'angle $\widehat{POW}$. On note :

$$\alpha = \lfloor n \rfloor t$$

- β (Figure 13a) : Sur cette figure, on a placé un autre angle nommé β qui correspond à l'angle

$\widehat{POL}$, avec L le bout du bras du robot. Les angles t et β sont donc supplémentaires :

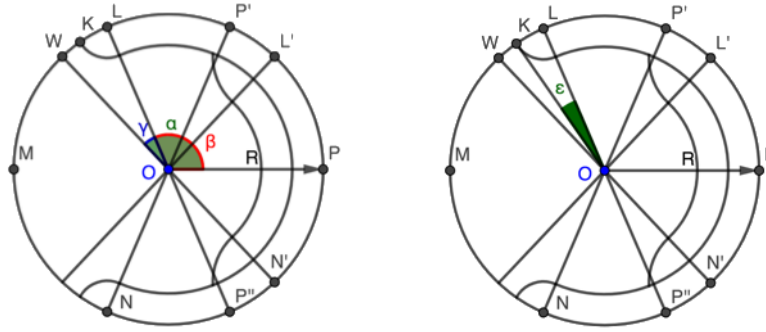
$$\beta = \pi - t$$

- γ (Figure 13a) : Sur cette figure, on a placé un troisième angle nommé γ qui correspond à la différence entre α et β . On note :

$$\gamma = \alpha - \beta$$

- ε (Figure 13b) : Sur cette figure, on place un dernier angle nommé ε :

$$\varepsilon = \widehat{LOK}$$



(a) Définition des angles α, β et γ

(b) Définition de l'angle ε

FIGURE 13 – $R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{2.7}$

Comme nous considérons un point en limite de la Zone 2 pour ce raisonnement, il se trouve à une distance légèrement supérieure à $2s$ du bord du plateau. Au bout de deux coups, il se retrouvera à une distance très petite du bord du plateau. Il sera donc dans la Zone 1 si l'image du point P après deux rotations se trouve dans la Zone 1, soit si $\gamma \leq \varepsilon$.

On va tout d'abord calculer la valeur de l'angle γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha - \beta \\ \Leftrightarrow \gamma &= ([n]t) - (\pi - t) \\ \Leftrightarrow \gamma &= [n]t - \pi + t \\ \Leftrightarrow \gamma &= ([n] + 1)t - \pi \\ \text{Or, } t &= \frac{\pi}{n} \\ \Leftrightarrow \gamma &= ([n] + 1)\frac{\pi}{n} - \pi \\ \Leftrightarrow \gamma &= \pi \left(\frac{[n] + 1}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

Ensuite calculons l'angle ε : on va utiliser la trigonométrie : considérons le triangle LOK , isocèle en O car $[LO]$ et $[KO]$ sont des rayons du cercle de centre O et de rayon 1. Pour calculer l'angle ε en utilisant la trigonométrie, il nous faut un triangle rectangle. Pour en créer un, puisque LOK est isocèle en O on trace la médiatrice m de $[LK]$ qui passe par O . De plus, LK vaut s car K est un point du cercle de centre L et de rayon s . Définissons le point F comme étant l'intersection entre le segment $[LK]$ et la droite m .

LF vaut $\frac{s}{2}$ car il fait la moitié de LK . On a donc deux triangles rectangles semblables (car LOK est isocèle en O). On peut en déduire que $\widehat{LOF}$ et $\widehat{KOF}$ sont égaux et valent $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \frac{LF}{LO} \\ \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} &= \arcsin\left(\frac{LF}{LO}\right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon &= 2 \cdot \arcsin\left(\frac{LF}{LO}\right) \\ \text{Or, } LF &= \frac{s}{2} \\ \Leftrightarrow \varepsilon &= 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2}\right)\end{aligned}$$

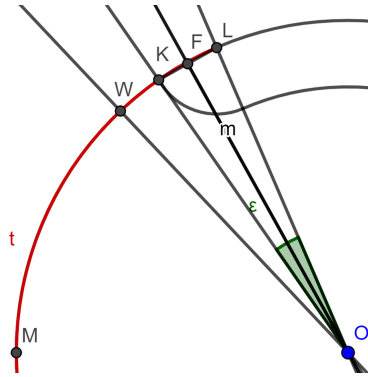


FIGURE 14 – Le point F et la droite (FO)

Nous savons que la puce arrivera au deuxième coup sur la droite (OW) . Donc si $\widehat{LOW}$ est inférieur ou égal à $\widehat{LOK}$, alors la puce a une chance de gagner car elle peut se trouver dans la Zone 1 puisqu'elle se trouvera au bord du plateau à $\lfloor n \rfloor$ coups. Pour savoir avec quelles valeurs de n et s c'est le cas, comparons γ et ε . Il nous faut donc un γ inférieur ou égal à ε , car il est nécessaire que le point W soit plus proche de L que le point K pour que la Zone 3 soit permise [8]. En effet, la droite (OW) correspond à la position la plus proche de la sortie au bout de la deuxième rotation du robot. Donc si cette droite dépasse la limite de la Zone 1, alors la Zone 3 est permise. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\gamma &\leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow \pi \left(\frac{\lfloor n \rfloor + 1}{n} - 1 \right) &\leq 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\lfloor n \rfloor + 1}{n} &\leq \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) + 1\end{aligned}$$

Pour rappel, on cherche un n limite. On va donc simplifier cette inéquation en mettant n d'un seul côté. L'inéquation dépend aussi de s , n et $\lfloor n \rfloor$. En connaissant un intervalle qui contiendrait n (deux entier consécutifs), et connaissant s , on peut alors trouver le n limite :

$$n \geq \frac{\lfloor n \rfloor + 1}{\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) + 1} \quad (2)$$

Voyons ce qu'on trouve dans le cas évoqué au début de cette section : nous avons donc $s = \frac{1}{5}$ et $\lfloor n \rfloor = 2$:

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{2+1}{\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 1} \\ \Leftrightarrow n &\gtrsim \frac{3}{1,06} \\ \Leftrightarrow n &\gtrsim 2.82 \end{aligned}$$

En pratique la valeur de n définie par la formule (2) majore la véritable valeur de n à partir de laquelle une Zone 3 existe. En effet, la puce pouvant se déplacer dans n'importe quelle direction, elle peut se retrouver dans la Zone 1 pour une plus petite valeur de n . En utilisant des simulations sur Geogebra, on trouve qu'il existe une Zone 3 pour $n \geq 2,67$, $R = 1$ et $s = \frac{1}{5}$. Néanmoins, la valeur limite de n déterminée dans cet article permet d'affirmer que pour tout n supérieur à cette limite, une Zone 3 existe.

3.3 Les zones dans le cas où la condition du 2.2.1 n'est pas respectée ($t \leq \pi s$)

Maintenant que nous avons déterminé le nombre de zones dans le cas où $t > \pi s$, nous pouvons regarder ce qu'il se passe dans le cas où $t \leq \pi s$.

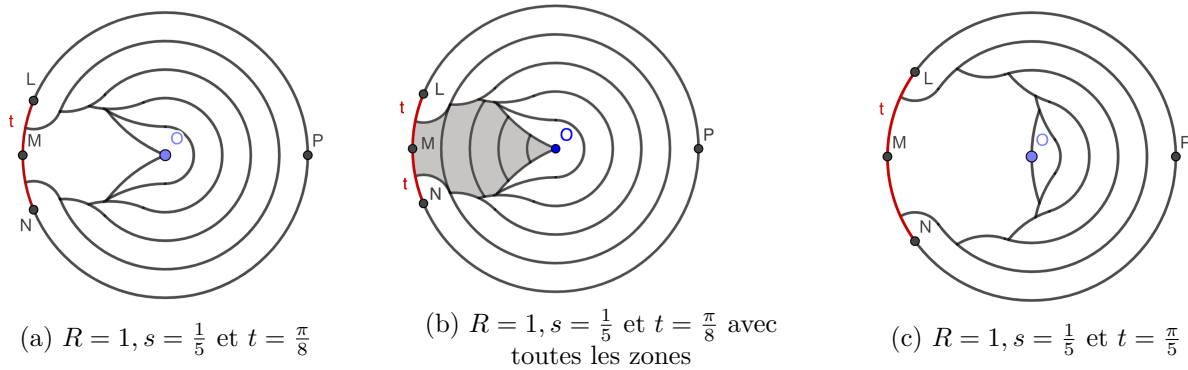


FIGURE 15 – Cas où $t \leq \pi s$

Sur la Figure 15, on peut observer que les zones atteignent le centre O , ce qui signifie que dans tous les cas, la puce peut gagner.

Sur la Figure 15a, on peut voir qu'il y n'y a que 5 zones de tracées malgré le fait que $t = \frac{\pi}{8}$. En effet, on peut voir que le point O se trouve dans la 5^{ème} zone tracée et que d'après le paragraphe 2.1, la puce peut toujours revenir sur O . Nous pouvons donc en déduire que peu importe l'endroit où la puce apparaît, elle peut revenir dans la zone 5 et donc gagner [9]. C'est pourquoi il est inutile dans ce cas de tracer les autres zones, car elles vont recouvrir le plateau.

Sur la Figure 15b, on a tracé toutes les zones gagnantes de la puce et on voit qu'elles recouvrent effectivement tout le plateau. En gris sont les dernières zones que l'on n'a pas tracées dans la Figure 15a.

Sur la Figure 15c, on peut voir que d'après les paramètres $t = \pi s$ c'est un cas particulier car il rentre dans le cas du 2.2.1, c'est pour ça qu'on le traite malgré tout ici, mais la puce peut dans tous les cas gagner.

Nous pouvons donc en déduire que lorsque $t \leq \pi s$, il n'est utile de tracer que les $\frac{1}{s}$ premières zones. Car puisque la puce peut toujours atteindre le centre, elle peut toujours gagner peu importe son lieu d'apparition.

4 Conclusion

Ce problème ne se limite donc pas à trouver le nombre de coups qu'il faut pour sortir du plateau : on arrive à trouver des stratégies dans les deux camps, ainsi qu'à trouver des paramètres pour lesquels la puce ou le robot a plus de chances de gagner ou même en trouver pour lesquels l'un des deux est sûr de gagner. Nous avons également réussi à cartographier les différentes zones où la puce peut gagner si elle a une bonne stratégie en fonction des paramètres du problème.

Cependant, dans le cas où $t = \frac{\pi}{n}$ avec n non entier, nous n'avons pas démontré la limite exacte pour laquelle une zone $[n] + 1$ se forme. Nous avons cependant majoré cette valeur. Cela peut donc être intéressant pour continuer ce sujet de déterminer cette limite précise.

De plus dans notre programme une imperfection fait que le tracé des "arcs de cercles" est imprécis (Figure 16). En effet, lorsque le bord d'une zone se fini au niveau des "arcs de cercles" de la zone précédente, il faudrait prolonger les bords de cette zone. Une piste pour la continuité du sujet serait de modifier l'algorithme en améliorant la précision du tracé.

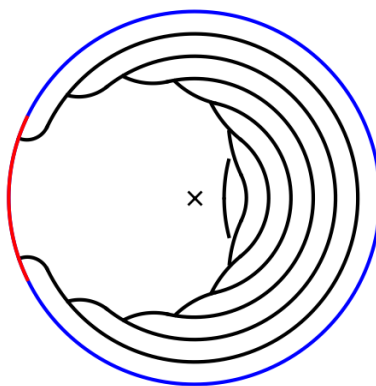


FIGURE 16 – Erreur possible lors du tracé
($R = 1, s = \frac{1}{10}, t = \frac{\pi}{7}$)

On remarque également que dans certains cas, la puce a malgré tout une méthode pour rester dans la Zone 1 et donc finir par s'enfuir. Par exemple dans la Figure 17, si la puce se retrouve exactement au

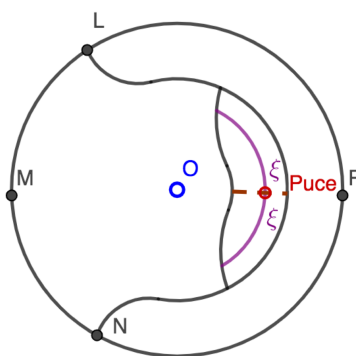


FIGURE 17 – Le robot ne pourra pas faire sortir la puce de la Zone 1 en un coup
($R = 1, s = \frac{1}{3}, t = \frac{\pi}{2.3}$)

point *Puce* à la fin du 1^{er} tour et que $\xi > t$, alors le robot ne pourra pas faire sortir la puce de la Zone 2. Il existe donc une sorte de Zone "de sécurité" permettant dans certains cas à la puce de rester dans la Zone 1. Il serait possible d'approfondir ces cas pour déterminer vraiment le nombre de zones dans lesquelles si la puce apparaît, elle gagne, soit les zones de sécurité.

Remerciements

On remercie Amic FROUELLE et Philippe PAUL de nous avoir aidés dans la continuité du sujet.

Merci également à Ariane qui nous a encadrée cette année.

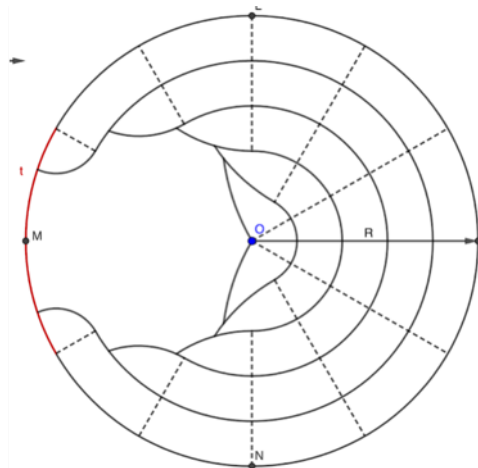
Nous remercions aussi Massil, un excellent compagnon de bord, pour sa gentillesse et son avis précieux sur notre présentation.

Nous remercions aussi le lycée CARNOT de nous avoir permis de participer à MATH.en.JEANS Merci également à l'organisation de MATH.en.JEANS pour tout le travail fournis lors de cette année.

Images



$$R = 1, s = \frac{1}{10000}, t = \frac{\pi}{9999}$$



$$R = 1, s = \frac{1}{5}, t = \frac{\pi}{6}$$

Annexe

```
1 from matplotlib import pyplot as pl
2 from math import pi,cos,sin,atan
3
4 def Zones(n,s,R=1):
5     angles=[] #Liste qui contiendra des angles entre 0 et 2 pi
6     X,Y=[],[] #coordonnees des points du bord du plateau
7     X_robot,Y_robot=[],[] #coordonnees des points des bras du robot
8     t=pi/n #calcul de la longueur des bras du robot
9     a=(pi-t)/(pi*2) #calcul de la proportion d'un bras du robot sur
10    #le cercle
11    b=(pi+t)/(pi*2) #calcul de la proportion de l'autre bras du robot
12    #sur le cercle
13    for i in range (0,1001): #liste d'angles entre 0 et 2 pi
14        angles.append(i*2*pi/1000)
15    for i in range(0,len(angles)): #creation du plateau
16        X.append(R*cos(angles[i]))
17        Y.append(R*sin(angles[i]))
18    for i in range(int(a*len(angles)),int(b*len(angles))+1):
19        #creation des bras robot
20        X_robot.append(R*cos(angles[i]))
21        Y_robot.append(R*sin(angles[i]))
22
23    #Chaque zone est delimitée par un arc de cercle de centre 0
24    #ainsi que par deux "quarts de cercles" aux bords de la zone
25
26    X_zones,Y_zones=[[[]],[[]]] #creation zones (arcs de cercle)
27    for j in range(1,n): #pour chaque zone
28        a=(pi-j*t)/(pi*2) #borne pour tracer l'arc de cercle
29        b=(-pi+j*t)/(pi*2) #borne pour tracer l'arc de cercle
30        X_zones.append([]) #creation d'une sous liste par zone
31        Y_zones.append([]) #creation d'une sous liste par zone
32        borne1=int(a*len(angles)) #borne pour tracer l'arc de cercle
33        borne2=int(b*len(angles))-2 #borne pour tracer l'arc
34        for i in range(borne1, borne2,-1): #creation de l'arc
35            X_zones[j].append((R-j*s)*cos(angles[i]))
36            Y_zones[j].append((R-j*s)*sin(angles[i]))
37        pl.plot(X_zones[j],Y_zones[j], "k") #tracer
38
39    def calcul_angle(y,x): #fonction qui calcule l'angle entre
40        #le point (0;1) et les points des "quarts de cercle"
41        angle=atan(y/x)*180/pi #on s'en sert pour conserver un angle
42        #entre 0 et 360 degres
43        if y<0 and x>0: #python donne un angle entre 0 et -90 degres
44            angle=360+angle
45        elif x<0: #python donne un angle entre -90 et -180 degres
46            angle=180+angle
47        return angle
48
```

```

49
50
51 X_cercle1,Y_cercle1=[[[]],[[]]] "quarts de cercle" des differentes
52 #zones (haut)
53 X_cercle2,Y_cercle2=[[[]],[[]]] "quarts de cercle" des differentes
54 #zones (bas)
55 for j in range(1,n+1):
56     X_cercle1.append([]) #creation de liste pour chaque zone
57     Y_cercle1.append([])
58     X_cercle2.append([])
59     Y_cercle2.append([])
60     a,b = (pi-j*t)/(pi*2) , (-pi+j*t)/(pi*2)
61     #determination de centre des quart de cercle
62
63     x1_pt=cos(angles[int(a*len(angles))])
64     y1_pt=sin(angles[int(a*len(angles))])
65     #coordonees du centre du quart de cercle du haut
66     x2_pt=cos(angles[int(b*len(angles))])
67     y2_pt=sin(angles[int(b*len(angles))])
68     #coordonees du centre du quart de cercle du bas
69     for i in range(618): #entre 0 et 2pi
70         c=j*s*sin(i/100)+y1_pt #coordonnees des points
71         d=j*s*cos(i/100)+x1_pt
72         e=j*s*sin(i/100)+y2_pt
73         #coordonnees des points
74         f=j*s*cos(i/100)+x2_pt
75
76         test1=calcul_angle(c,d)>((n-j)*t)*180/pi and c>0
77         #test si les points du quart de cercle sont necessaires
78         #on a besoin d'environ un quart et non de tout le cercle
79         test2=calcul_angle(e,f)<((n+j)*t)*180/pi and e<0
80         #test si les points du quart de cercle sont necessaires
81         if d**2+c**2<=(1-(j-1)*s)**2 and test1:
82             #distance entre les points du quart de cercle et 0
83             X_cercle1[j].append(d)
84             Y_cercle1[j].append(c)
85         if f**2+e**2<=(1-(j-1)*s)**2 and test2:
86             #distance entre les points du quart de cercle et 0
87             X_cercle2[j].append(f)
88             Y_cercle2[j].append(e)
89         pl.plot(X_cercle1[j],Y_cercle1[j], "k") #tracer
90         pl.plot(X_cercle2[j],Y_cercle2[j], "k")
91     pl.plot(0,0,"kx") #tracer
92     pl.plot(X,Y,"b")
93     pl.plot(X_robot,Y_robot, "r")
94     pl.axis("equal")
95     pl.show()
96
97 Zones(6,0.1) #trace le plateau et les zones dans le cas : n=6, s=0.1

```

Notes d'édition

[1] La notation $\lfloor \frac{d}{s} \rfloor$ désigne la partie entière de d/s . En fait, après $\lfloor \frac{d}{s} \rfloor - 1$ étapes, la puce se trouve à une distance de O strictement inférieure à $2s$. Dans le cas où d/s est entier, cette distance est égale à 1 et un seul saut lui suffira pour atteindre O , et le nombre minimum de sauts pour atteindre O est d/s (et non $\lfloor \frac{d}{s} \rfloor + 1$).

[2] Il vaudrait mieux dire “elle pourra arriver au bord en $1/s$ coups”, puisqu’on ne sait pas encore si la puce va gagner.

Mais le nombre de coups est entier, donc soit il faut supposer $1/s$ entier, soit il faut le remplacer par son arrondi entier supérieur à $1/s$, noté $\lceil \frac{1}{s} \rceil$. Et la puce gagne si, après les $\lceil \frac{1}{s} \rceil - 1$ premiers coups, le robot ne l’a pas amenée dans le secteur NOL , autrement dit si $(\lceil \frac{1}{s} \rceil - 1)t \leq \beta = \pi - t$.

[3] En remplaçant $1/s$ par $\lceil \frac{1}{s} \rceil$ selon la remarque précédente, on obtient la condition suffisante un peu plus faible $t \leq \pi / \lceil \frac{1}{s} \rceil$.

[4] Dans les figures 7g et 7i, la “partie grise” comprend tout le rayon OM .

[5] Ce qui a été démontré précisément, c’est que l’angle que forme l’arc de cercle intérieur de la i -ème zone s’annule pour $i = n$; cela ne signifie pas qu’il n’y a pas d’autres zones, mais que pour les éventuelles zones suivantes il n’y a plus d’arc de cercle intérieur – voir en fin d’article le paragraphe avec la figure 17 : il existe une 3^e zone formée des points hors des zones 1 et 2 d’où la puce peut rejoindre la “zone de sécurité” en un saut.

[6] Les zones gagnantes pour la puce ne sont pas encore complètement déterminées mais on se convainc facilement que la puce ne pourra pas gagner.

[7] Dans les figures 13a et 13b, le point W est le dernier des points P_i .

[8] Comme cela est expliqué en fin de paragraphe 3.2.2, on n’a ici que des conditions *suffisantes*, et non nécessaires, pour qu’il y ait une zone 3 car on a fait un choix de stratégie qui peut ne pas être optimal (à savoir que la puce se déplace toujours suivant un des rayons du plateau).

[9] Elle peut rejoindre la zone 5, donc gagner, cependant pas toujours en un seul saut, et le découpage de la zone grisée sur la figure ne correspond pas aux zones définies par le nombre de sauts nécessaires pour gagner. Mais il n’est effectivement pas utile ici de tracer ces dernières zones.