Magic' Maths

Année 2016 – 2017

Morgane MEGARD, Iris TISSERAND, élèves de Terminale S.

Encadrés par Mickaël DRAGAN

Établissement : Lycée Claude Bernard, Villefranche-sur-Saône

Chercheur : Olivier DRUET, Université Claude Bernard Lyon I.

1. Introduction

Nous vous proposons de mettre en place un tour de magie sur base des maths :

Nous disposons de n lettres, le spectateur en choisit p. Le magicien dit $p-1$ lettres à son dévoué complice qui trouvera mystérieusement la dernière qu'avait choisie le spectateur.

Il est évident que le magicien doit utiliser les lettres dites par le spectateur pour faire trouver la dernière. Cependant, il choisit lesquelles il dit à son acolyte et ainsi, quelle est la lettre mystère à trouver. Ce tour n'est possible que pour certaines valeurs de p et de n, notre travail a consisté à déterminer lesquelles.

2. Pour quelles valeurs de p et de N le tour est-il réalisable ?

Pause vocabulaire

- Une combinaison est l'ensemble des p lettres choisies par le spectateur, peu importe l'ordre.
- Un codage est la suite des $p-1$ lettres que dit le magicien à son complice, l'ordre est très important !

La condition

Donc, pour que le tour soit possible, il faut qu'il y ait autant voire plus de codages que de combinaisons :

nombre de combinaisons $\leq$ nombre de codages (1)

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} \leq \frac{n!}{(n-p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow p! \times (n-p)! \geq (n-p+1)!$$

$$\Leftrightarrow p! \geq n-p+1$$

$$\Leftrightarrow p! + p \geq n+1$$

Démonstration

1. Cette condition est nécessaire pour que le tour soit possible.

Démonstration par l'absurde :

Supposons que $p!+p<n+1$. Alors le nombre de codages est strictement inférieur au nombre de combinaisons, et on ne peut associer un codage différent à chacune des combinaisons.
Donc $p!+p\geq n+1$ est nécessaire.

2. Et elle est aussi suffisante.

Preuve avec le lemme des mariages.

Le lemme des mariages consiste à imaginer une société dans laquelle tous les mariages sont décidés de façon centralisée. Chaque fille en âge de se marier fournit à l'Ordinateur Central la liste des garçons qui lui conviennent. Sur la base de ces listes, l'ordinateur effectue le Mariage, c'est-à-dire qu'il associe à chaque fille le nom de l'un des garçons de sa liste. Aucune fille ne doit rester célibataire. Cette société est strictement monogame : chaque fille est mariée à un seul garçon, chaque garçon à au plus une fille.

Condition de mariage : *La réunion des listes d'un groupe quelconque de filles contient au moins autant de noms de garçons différents qu'il y a de filles dans le groupe.*

Lemme des mariages : *Si la condition de Mariage est satisfaite, alors il est possible de marier toutes les filles, chacune à l'un des garçons de sa liste.*

Preuve (du lemme des mariages)
On note les filles avec des nombres entiers naturels non nuls, et leurs choix par des lettres. Par exemple, si la fille n°1 choisit les garçons A et B, que la fille n°4 choisit le garçon D et que la fille n°5 choisit les garçons B et E, leur choix combiné est noté :
$E_{1;4;5}=\{\,A\,;B\,;D\,;E\,\}$. Le nombre d'éléments de $E_{1;4;5}$, noté $\#E_{1;4;5}$ vaut alors 4.

Pour tout entier $n\geq 2$, notons P_n la propriété :
« *Pour tout groupe de n filles $(1;2;3;\ldots;n)$ tel que pour tous les groupes de taille $m\leq n$ qu'on peut former entre ces n filles, le nombre de leurs choix combinés soit supérieur ou égal à m, alors les mariages sont possibles*. »

Initialisation
Montrons que P_2 est vraie, c'est-à-dire que :
« *Pour tout groupe de 2 filles $(1;2)$ tel que pour tous les groupes de taille $m\leq 2$ qu'on peut former entre ces 2 filles, le nombre de leurs choix combinés soit supérieur ou égal à m, alors les mariages sont possibles*. »

- Si $E_{1;2}=\{\,A\,;B\,\}$, alors les mariages sont possibles.
- Si $E_{1;2}=\{\,A\,;B;\,C\,\}$, il suffit de supprimer un choix pour rendre le Mariage possible, etc.

Donc P_2 est vraie.

Hérédité
Supposons que P_n est vraie jusqu'à un rang p fixé, c'est-à-dire que :
« *Pour tout $n\leq p$ et tout groupe de n filles tel que pour tous les groupes de taille $m\leq n$ qu'on peut former entre ces p filles, le nombre de leurs choix combinés soit supérieur ou égal à m, alors les mariages sont possibles*. »

Montrons que, sous cette hypothèse de récurrence, P_n est vraie au rang suivant $p+1$, c'est-à-dire que :
« *Pour tout groupe de* $p+1$ *filles* $(1; 2; 3; \dots; p; p+1)$ *tel que pour tous les groupes de taille* $m \leq p+1$ *qu'on peut former entre ces* $p+1$ *filles, le nombre de leurs choix combinés soit supérieur ou égal à* m*, alors les mariages sont possibles*. »

- S'il existe α tel que $\alpha \in E_{1;2;3;\dots;p;p+1}$ et $\alpha \notin E_{1;2;3;\dots;p}$, alors il suffit alors de marier la fille n°$(p+1)$ avec le garçon α puis de revenir à l'hypothèse de récurrence pour les autres filles.
- Si $E_{1;2;3;\dots;p;p+1} = E_{1;2;3;\dots;p}$, alors $\#E_{1;2;3;\dots;p} \geq p+1$. Deux cas : (2)
  - Soit pour tout $E_{1;2;3;\dots;k}$ (avec $k < p$), $\#E_{1;2;3;\dots;k} \geq k+1$.
    Dans ce cas, il suffit de marier une fille au hasard pour revenir à $\#E_{1;2;3;\dots;k} \geq k$ donc à l'hypothèse de récurrence.
  - Soit il existe un $E_{1;2;3;\dots;k}$ avec $k < p$ tel que $\#E_{1;2;3;\dots;k} = k$.
    Dans ce cas, les mariages sont obligatoires jusqu'à revenir à $\#E_{1;2;3;\dots;k} \geq k$ soit à l'hypothèse de récurrence.

Donc P_n est héréditaire.

Conclusion
On sait que P_2 est vraie et que P_n est héréditaire. Donc, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Application au tour de magie
Ainsi, si les filles représentent les ensembles de p lettres choisies pas le spectateur, peu importe l'ordre, c'est-à-dire ce qu'on appelle les combinaisons de lettres, et leurs choix de maris représentent les suites de $p-1$ lettres que dit le magicien à son complice, ce qu'on appelle les codages de lettres, on peut appliquer le lemme des mariages à notre cas.

Cependant, notre tour implique une nouvelle contrainte au lemme : il est nécessaire que les lettres choisies pour le codage appartiennent aux lettres des combinaisons (3). Mais alors, pourquoi peut-on affirmer que le lemme des mariages s'applique malgré tout à notre tour de magie?

Cette nouvelle condition revient à dire que les filles ne choisissent pas n'importe qui. Ainsi, toutes ne choisissent pas les mêmes garçons. Le lemme s'appliquera donc sur un nombre de filles et de garçons plus restreint, et nous avons montré qu'il est vrai pour tout groupe de n filles $(1; 2; 3; \dots; n)$ choisissant au moins n maris $E_{1;2;3;\dots;n}$. Le lemme s'applique donc bien à notre cas.

Nous arrivons au tableau suivant qui nous donne le plus grand n possible en fonction de p :

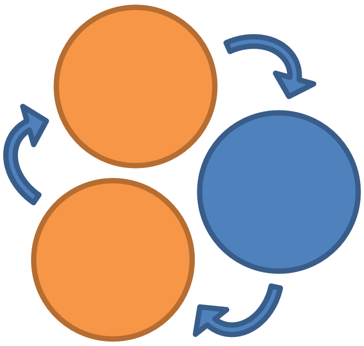
Si N≤	P=	nb de combinaisons
1	1	1
3	2	3
8	3	56
27	4	17550
124	5	225150024
725	6	1,97555E+14
5046	7	1,64586E+22
40327	8	1,73359E+32
362888	9	3,0071E+44
3628809	10	1,09112E+59
39916810	11	1,02697E+76
479001611	12	3,04584E+95

Nous voyons par exemple que, si le spectateur choisit 4 lettres parmi toutes celles de l'alphabet, que j'en donne 3 à mon associé, il peut théoriquement trouver la dernière. Cependant, il devra retenir 17 750 combinaisons, bonne chance !

3. Les tours qui en découlent et leurs solutions

- Tout d'abord un tour facile pour bien comprendre : $n = 6$ et $p = 3$

Nous considérons les six lettres comme deux « boucles » de 3 lettres :



Ainsi, les trois lettres que va choisir le spectateur seront soit toutes dans la même boucle, soit deux dans une et une dans l'autre. Lorsqu'on choisit deux lettres dans boucle de trois lettres, il est obligatoire qu'elles se suivent.

On se met d'accord avec mon acolyte sur les boucles (elles peuvent être ABC et DEF ou ACE et BDF ou autre si vous aimez vous compliquer la vie !). Nommons L_1et L_2 les lettres que je lui dis dans l'ordre où je les lui dis. La lettre que l'on cherche, appelons la L_3, sera la lettre suivante dans la boucle de L_1.

Exemple
Nous nous mettons d'accord sur les boucles ABC et DEF.
Si le spectateur choisit ABE, je vais dire à mon acolyte "AE". A est L_1 et la lettre suivante dans sa boucle est B. Mon acolyte me dira "B".

Autre exemple
Si le spectateur choisit CDF. Je vais dire à mon acolyte "FC". F est L_1 et la lettre suivante dans sa boucle est D. Mon acolyte me dira "D".

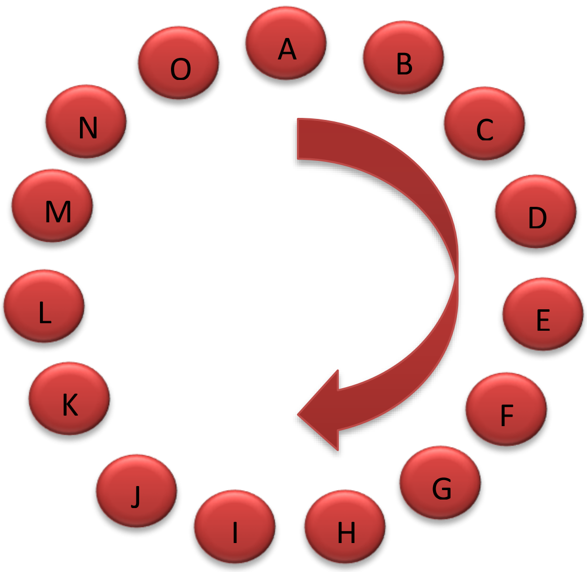
Puis, voici deux tours de magic'maths avec un grand n et un petit p mais humainement réalisables (nous vous laissons le plaisir d'apprendre les 17 750 combinaisons tout seul) :

- Pour $n = 15$ et $p = 4$

Les lettres sont en ordre alphabétique et placées en cercle. Je donne à mon acolyte 3 lettres. Notons L_1 la première lettre dans l'ordre alphabétique et de même pour L_2 et L_3. J'associe un numéro aux 6 codes qui en résultent :

- $L_1 - L_2 - L_3 = 1$
- $L_1 - L_3 - L_2 = 2$
- $L_2 - L_1 - L_3 = 3$
- $L_2 - L_3 - L_1 = 4$
- $L_3 - L_1 - L_2 = 5$
- $L_3 - L_2 - L_1 = 6$

Ensuite, nous nous mettons d'accord sur le fait que la lettre que l'on cherche (que l'on appellera L_4) se trouve entre L_3 et L_1 dans l'ordre alphabétique.



Mon acolyte prend L_3 pour point de départ et compte le nombre de lettres correspondant à la combinaison que je lui ai donné.
L_4 est la lettre sur laquelle elle arrive.

<u>Exemple</u>
Si le spectateur choisit EHJM. E est alors L_1, H est L_2, J est L_3 et M est L_4. Il y a 3 lettres entre J et M, je dois donc lui dire L_1, L_2 et L_3 dans l'ordre du troisième cas soit : $L_2 - L_1 - L_3$. Je lui dis H-E-J. Elle part de J et compte trois lettres : elle dira M !

Cela fonctionne car il ne peut y avoir plus d'un espace d'au moins 6 lettres et s'il y en avait un entre L_3 et L_4, je m'arrangerais pour que L_2 devienne L_1, L_3 devienne L_2, L_4 devienne L_3 et que L_1 soit la lettre à trouver par prolongement sur le cercle ci-dessus (en choisissant l'ordre du codage).

<u>Exemple</u>
Si le spectateur choisit ABCJ. Je ne peux pas lui faire trouver J car il y a 7 lettres entre C et J (qui seraient L_3 et L_4). Je prends donc B comme L_1, C comme L_2, J comme L_3 et A comme L_4. Il y a 6 lettres entre J et A, je dois donc lui dire L_1, L_2 et L_3 dans l'ordre du sixième cas soit : $L_3 - L_2 - L_1$. Je lui dis J-C-B. Elle part de J et compte 6 lettres : elle dira A !

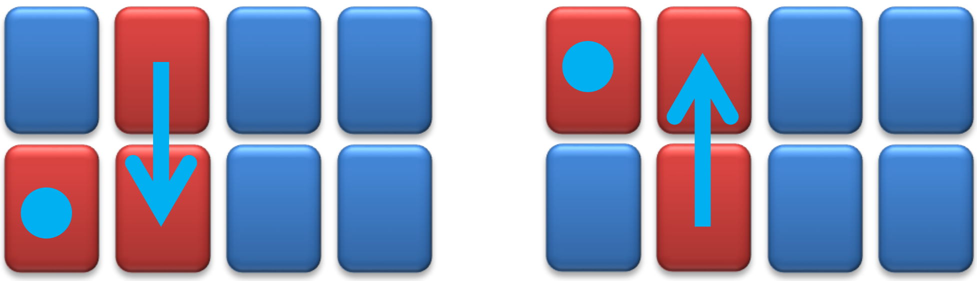
- Pour $N = 8$ et $p = 3$

Si nous reprenons notre tableau de tout à l'heure, nous voyons que ce cas est un cas « critique », c'est-à-dire que : $nombre\ de\ combinaison = nombre\ de\ codages$. Il est donc le plus compliqué auquel nous avons abouti.

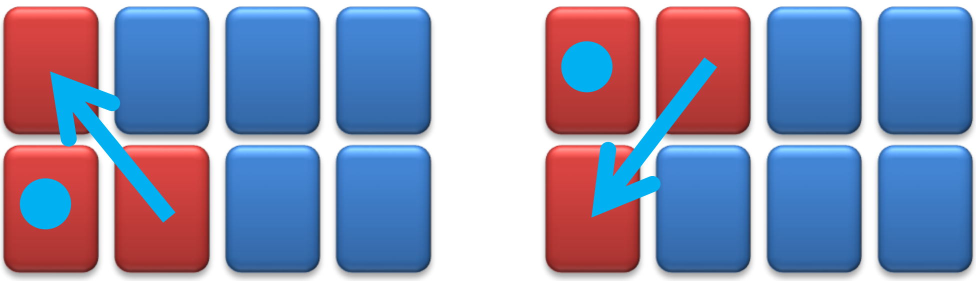
Pour coder, il faut raisonner graphiquement. Il y a 6 cas :

Légende :
→ Ce que je lui dis dans l'ordre
Ce qu'elle trouve
Lettres choisies par le spectateur

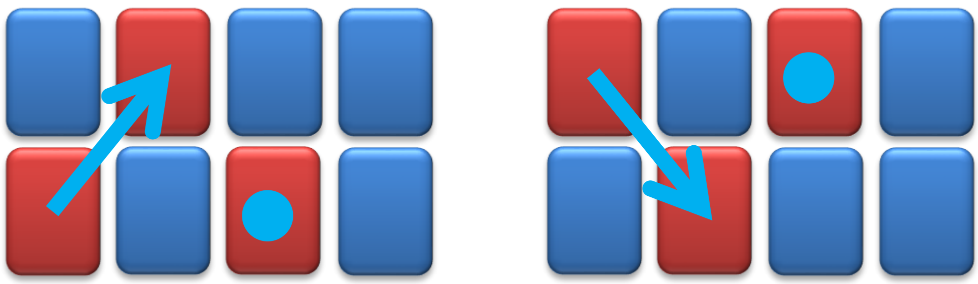
<u>1[er] cas</u>



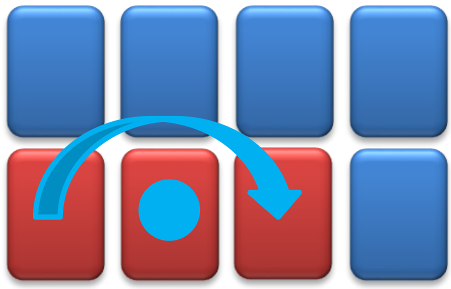
<u>2[e] cas</u>



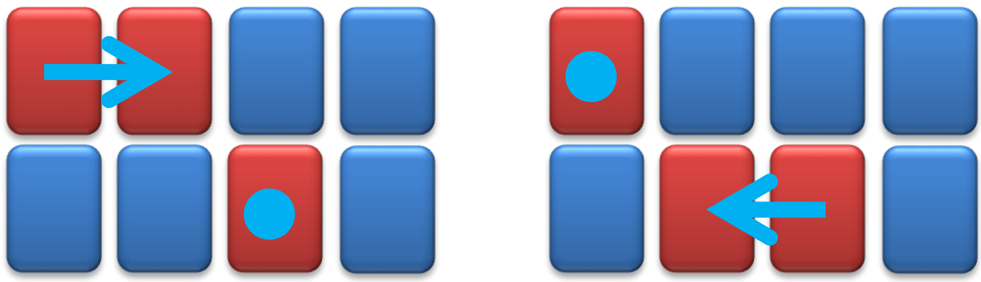
3e cas



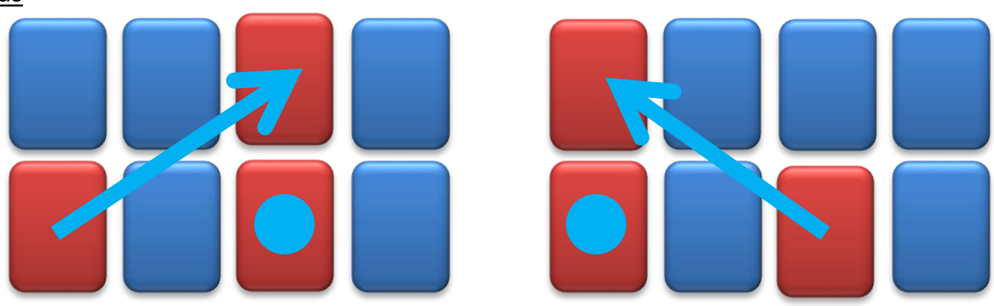
4e cas (4)



5e cas



6e cas



On considère que les lettres ainsi disposées forment une « boucle ». C'est-à-dire :

Cela nous permet de ramener chaque "motif de cartes" que choisira le spectateur à un cas connu et de pouvoir le coder (5).

Notes d'édition

(1) Ici les codages sont des suites ordonnées de $p-1$ lettres, aussi appelés des *arrangements* de $p-1$ lettres parmi les n. Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n, noté A_n^k, est égal à $n!/(n-k)!$ – et le nombre de combinaisons de n éléments p à p est le coefficient du binôme $\binom{n}{p}$, noté aussi C_n^p.

(2) Dans les deux cas, il faut considérer tous les sous-ensembles E_F de choix combinés des groupes F de k filles parmi $1, 2, 3, \dots, p$ (avec $k < p$).
Dans le second cas, c'est-à-dire si il existe un F avec $\#E_F = \#F = k < p$, on doit marier ces k filles avec les k garçons de E_F, ce qui est possible grâce à l'hypothèse de récurrence. Ensuite, en excluant ces k garçons déjà mariés, on peut appliquer de nouveau l'hypothèse de récurrence aux $p+1-k$ filles restantes : en effet, pour tout groupe G de l filles parmi les $p+1-k$ restantes, $F \cup G$ comporte $k+l$ filles et on a $\#E_{F\cup G} \geq \#(F \cup G) = k+l$; en enlevant de $E_{F\cup G}$ les k garçons déjà mariés il reste au moins l choix combinés de maris encore célibataires pour les filles de G.

(3) Ce n'est pas une nouvelle contrainte ; cela signifie simplement, que pour une « fille » donnée, c'est-à-dire une combinaison de p lettres, les choix possibles de maris sont les suites de $p-1$ lettres parmi ses p lettres.

Il reste à vérifier qu'on peut appliquer le lemme des mariages lorsque la condition $p! + p \geq n+1$ est vérifiée. Or, d'un côté une fille a $A_p^{p-1} = p!$ choix de maris, et de l'autre un « garçon », c'est-à-dire une suite de $p-1$ lettres, peut être choisi par $n-p+1$ filles, à savoir les combinaisons formées de ses propres lettres et de l'une des $n-p+1$ lettres restantes.
Pour chaque groupe de k filles, on compte en tout $k \times p!$ couples possibles et, comme un garçon ne peut être choisi que par $n-p+1$ filles, les choix combinés de ces k filles comportent au moins $k \times p!/(n-p+1)$ garçons différents. Donc si $p! \geq n-p+1$, il y a au moins k choix de garçons combinés pour tout groupe de k filles, et la la condition de mariage est bien vérifiée.

(4) Ici il faut ajouter le motif symétrique par échange des 2 lignes. Et de même pour les 5^{e} et 6^{e} cas.

(5) On recopie les motifs qui sont présentés par décalages circulaires : les 3 premières colonnes sont déplacées d'une colonne vers la droite et la dernière est remise à la place de la première ; en recommençant on obtient 4 motifs à partir de l'un d'eux – sauf pour le 6^{e} cas où les deux motifs présentés se correspondent par décalage circulaire (de deux colonnes).