Loups, chèvres, salades

Année 2017- 2018

Elèves : Ida Fjellvaer, Candice Blache, Léonie Kittel, Julie Breuil, Matthieu Moussine-Pouchkine

Établissements : Collège Raoul Dufy et Lycée Edouard Herriot, Lyon
(recherche par les deux établissements mais article par les lycéens)

Professeurs : Mme Di Fazio, Mme Therez

Chercheurs : Aline Parreau, Valentin Gledel

I. Présentation du sujet

Nous avons un berger qui possède un loup, une chèvre et une salade. Il voudrait les faire tous traverser une rivière avec un bateau qui ne possède qu'une seule place (en dehors de celle du berger). Si on les laisse seuls sur une rive, le loup mange la chèvre et la chèvre mange la salade, et en revanche le loup et la salade ne se mangent pas entre eux. On cherche à faire traverser tous les animaux sans qu'aucun ne se fasse manger. Voici la solution pour le cas de base :

Rive de départ	Rivière	Rive d'arrivée
salade, chèvre, loup, berger		Ø
Le berger traverse avec la chèvre.		
salade, loup		chèvre, berger
Le berger revient sur la rive de départ et laisse la chèvre sur l'autre rive.		
salade, loup, berger		chèvre
Le berger traverse et emmène le loup avec lui.		
salade		chèvre, loup, berger
Le berger revient en emmenant la chèvre.		
salade, chèvre, berger		loup
Le berger traverse et emmène la salade.		
chèvre		salade, loup, berger
Le berger retraverse pour venir chercher la chèvre.		

chèvre, berger		salade, loup
Le berger traverse avec la chèvre.		
Ø		salade, chèvre, loup, berger
Le berger a donc réussi à traverser la rivière, et tous ses animaux ont survécu. Ici il y a besoin de 7 traversées.		

Notre recherche consistera à regarder s'il est toujours possible de faire traverser tous les animaux si on fait varier le nombre de chèvres, de salades ou de loups, le nombre de places dans le bateau, et on se demandera également, dans les cas où c'est possible, en combien de traversées au minimum on peut faire traverser tous les animaux.

II. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Notations :

- P : nombre de places dans le bateau
- C : nombre de chèvres
- A : nombre d'autres (salades + loups)

- Le loup et la salade sont équivalents : on peut remplacer un loup par une salade
- Pour un nombre de loups, chèvres, salades, nous savons dans quels cas c'est possible et dans quels cas c'est impossible de faire traverser tous les animaux :
  - Possible:
    - Si C< P ;
    - Si A< P ;
    - Si C = P et A $\leq$ 2P ;
    - Si A = P et C $\leq$ 2P .
  - Impossible :
    - Si C>P et A>P ;
    - Si C=P et A>2P ;
    - Si A=P et C>2P .
- Pour un nombre de loups, chèvres, salades, dans les cas possibles, nous savons en combien de traversées (aller ou retour) minimum il est possible de faire traverser tous les animaux :
  - Si C+A $\leq$ P :1 traversée ;
  - Si C < P et A < P et C+A > P : 3 traversées ;
  - Si C < P et A $\geq$ P : $\left\lceil \frac{A}{P-C} \right\rceil \times 2-1$ traversées ;

    On définit $\lceil x \rceil$ la partie supérieure de x, soit le plus petit entier x' tel que x' $\geq$ x en d'autres termes :

    $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists n \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ x+1>n\geq x), \lceil x \rceil = n$ (1)
  - Si C=P et A<= 2P : 7 traversées.

III. Démonstrations

1. Démonstration de l'équivalence loup-salade

Les loups et les salades peuvent rester entre eux.

Les loups et les salades ne peuvent pas rester avec la chèvre.
Donc ils ont les mêmes interactions entre eux et avec la chèvre ainsi ils sont équivalents. On appelle cette classe d'équivalence les « autres », par opposition aux chèvres.

2. Démonstrations des cas possibles, impossibles

a) Cas impossibles :

- Si $P < A$ et $C > P$:

$P < A$, implique que l'on doit laisser des autres sur le bord au premier aller.
$P < C$, implique que l'on doit laisser des chèvres sur le bord au premier aller.
Donc si $P < A$ **et** $P < C$, on doit laisser des chèvres **et** des autres sur le bord au premier aller, donc ils se mangent entre eux et donc cela ne fonctionne pas.

- Si ($A = P$ **et** $C > 2P$) ou ($C = P$ **et** $A > 2P$) :

Cela revient au même car A et C ont des rôles symétriques.
On a donc choisi le cas $C = P$ et $A > 2P$.

Notation dans ce cas :

- G(A) : groupe d'autres de même nombre que le nombre de places ;
- G(C) : groupe de chèvres de même nombre que le nombre de places ;
- g(A) : groupe d'autres de nombre indéfini.

Rive de départ	Rivière	Rive d'arrivée
g(A) ; G(A) ; G(A) ; G(C) ; Berger		Ø
Obligation de prendre les chèvres car il y a plus d'autres que de places dans le bateau		
g(A) ; G(A) ; G(A)		G(C) ; Berger
On ne doit pas prendre les chèvres car cela revient au même qu'à l'étape précédente. On pourrait prendre une partie des chèvres mais on devrait les reprendre la fois suivante pour la même raison qu'à l'étape 1, ce serait donc inutile.		
g(A) ; G(A) ; G(A) ; Berger		G(C)
On emmène le plus d'autres possible pour optimiser, c'est à dire G(A) = P		
g(A) ; G(A)		G(A) ; G(C) ; Berger
On doit ramener soit les chèvres, G(C), soit les autres, G(A), mais si on ramène les autres alors on revient à l'étape d'avant, donc ça n'optimise pas le nombre de traversées.		
g(A) ; G(A) ; G(C) ; Berger		G(A)
On est obligé d'emmener soit toutes les chèvres soit tous les autres. Or si on emmène toutes les chèvres on revient à l'étape d'avant et on ne peut pas emmener tous les autres, car **g(A)+G(A) > P**, donc c'est **impossible.**		

b) Cas possibles :

- Si $A < P$ ou $C < P$:

Si $C < P$ il va toujours y avoir une solution car on peut prendre toutes les chèvres dans le

bateau, puis le remplir avec d'autres animaux. Même si A+C > P on peut faire des allers-retours avec les chèvres toujours dans le bateau. Avec cette méthode, les chèvres ne vont jamais être laissées seules sur la rive avec ni salades ni loups, alors c'est un cas possible.
Si A < P nous avons le même raisonnement.

- Si C = P et 2C ≥ A ≥ C :

On prouve seulement le cas A = 2C. Si ce cas est possible alors c'est possible en enlevant des autres.

On peut faire 3 groupes qui tiennent chacun dans le bateau et tels que les éléments de chaque groupe cohabitent entre eux :

- 1 groupe avec toutes les chèvres : C ;
- 2 groupes avec la moitié des autres chacun : A1 et A2.

Rive de départ	Rivière	Rive d'arrivée
C ; A1 ; A2 ; berger		∅
Le berger part avec toutes les chèvres. S'il en laissait sur la rive il serait obligé de laisser aussi des autres (car il y a trop d'autres pour qu'il puisse tous les emmener) et les chèvres mangeraient ou se feraient manger.		
A1 ; A2		C ; berger
Le berger repart tout seul. Ramener des chèvres ne serait pas optimal car de toute façon, par le même argument que précédemment il serait obligé de les reprendre à l'étape suivante.		
A1 ; A2 ; berger		C
Le berger emmène autant d'autres qu'il peut c'est à dire tout un groupe, par exemple A1.		
A2		C ; A1 ; berger
Le berger est obligé de ramener toutes les chèvres ou tous les autres, mais ramener tous les autres reviendrait à l'étape précédente donc il ramène plutôt les chèvres.		
A2 ; C ; berger		A1
De même, le berger emmène cette fois les autres.		
C		A1 ; A2 ; berger
Le berger retraverse pour venir chercher les chèvres.		
C ; berger		A1 ; A2
Le berger emmène toutes les chèvres.		
∅		A1 ; A2 ; C ; berger
Le berger a donc réussi à emmener tous ses animaux sur la rive d'arrivée.		

3. Démonstrations du nombre de coups

Cela concerne donc uniquement les cas possibles.

Le nombre de coups sera forcément impair car le bateau se situe à la fin sur l'île.
On a donc par exemple 1, 3, 5, 7, ... trajets.

1) $A < P$ ou $C < P$

- Si $A + C \leq P$: 1 trajet.

On peut alors mettre tous les animaux dans le bateau.

- Si $A \leq P$ et $C \leq P$ (en excluant le cas juste au-dessus) : 3 trajets.

On ne pas transporter tous les animaux en un seul trajet.
1er trajet: on emporte toutes les chèvres.
2ème trajet: on revient (les chèvres peuvent rester sur la rive).
3ème trajet: on emporte tous les autres.

- Si $C < P$, nous savons grâce à notre algorithme (2) on peut toujours faire traverser tous les animaux en au plus : $\left\lfloor \frac{A}{P-C} \right\rfloor \times 2 - 1$ traversées. (on rappelle que [x] est la partie inférieur de x, c'est à dire le plus petit entier x' tel que x' ≤ x)
$\forall\ x \in \mathbb{R}, (\exists n \in \mathbb{Z} \wedge x \geq n > x-1), \lfloor x \rfloor = n$

Cette valeur est une valeur toujours atteignable mais pas forcément optimale. Nous pensons néanmoins fortement que cette valeur est optimale malgré nos difficultés à le démontrer.
Justification :

- P - C est le nombre de places disponibles dans le bateau quand on a mis dedans toutes les chèvres.
- $\frac{A}{P-C}$: à chaque trajet, on met dans le bateau autant d'autres qu'il reste de places et on les fait traverser, et on répète cette opération jusqu'à avoir fait traverser tous les autres.
- $\left\lfloor \frac{A}{P-C} \right\rfloor$: on veut un nombre entier. (3)
- $\left\lfloor \frac{A}{P-C} \right\rfloor \times 2$: à chaque trajet, on doit faire le retour.
- $\left\lfloor \frac{A}{P-C} \right\rfloor \times 2 - 1$: On ne fait pas le retour du dernier trajet : quand il est sur la rive d'arrivée, le berger ne traverse pas sur l'autre rive.

2) $C = P$ et $2C \geq A > C$

Cela donne 7 traversées au minimum car il y a entre 2P+1 et 3P animaux en tout. Il y a donc 3 allers-retours au minimum car à chaque aller-retour on ne peut emmener que P animaux. De plus on sait que c'est possible d'atteindre 7 (justification : algorithme ci-dessus).

IV. Dans l'autre sens :

Dans notre recherche, nous sommes partis du nombre de places et d'animaux pour savoir si c'était possible, et de combien de traversées on aurait besoin. On aurait aussi pu partir du nombre de déplacements visé pour savoir de combien de places on aura besoin. Cette fois, on va donc partir du nombre de chèvres C, du nombre d'animaux A et du nombre de traversées visé T donné pour en déduire le nombre de places minimum P. On va regarder les différents cas possibles et regarder lequel donne un nombre de places minimum.

1. Nombre de places nécessaire pour que ce soit possible, sans contrainte sur le nombre de traversées :

On regarde ce que ça donne en se plaçant dans chaque cas :

- cas 1 :

On cherche le plus petit P tel que A < P ou C < P : c'est tout simplement min(A,C)+1.

- cas 2 :

On cherche P tel que P = C et C ≤ A ≤ 2C : ici la deuxième condition ne dépend pas de P. Si elle est vérifiée on prend P = C.
Donc au total le nombre de places minimum est min(A,C) si max(A,C) ≤ 2min(A,C) ; min(A,C)+1 sinon. (4)

2. Nombre de places nécessaire pour que ce soit possible en un certain nombre de traversées T :

- cas possible 1 : Si T = 1, il faut P ≥ A + C .
- cas possible 2 : T = 3, il faut A + C > P ≥ max(A,C).
- cas possible 3 : T = 7 il faut 2min(A,C) ≥ max (A,C) > min (A, C)=P.
- cas possible 4 : T= $\left\lceil \dfrac{\max(A,C)}{\mathrm{P}-\min(A,C)} \right\rceil$ (5)

$\Leftrightarrow \max(A,C) \le T \times (P-\min(A,C)) < \max(A,C)+P-\min(A,C)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\max(A,C)}{T} \le P-\min(A,C) < \dfrac{max(A,C)+P-min(A,C)}{T}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\max(A,C)}{T} + \min(A,C) \le P < \dfrac{max(A,C)+P-min(A,C)}{T} + \min(A,C)$,

il faut min(A,C) < P .

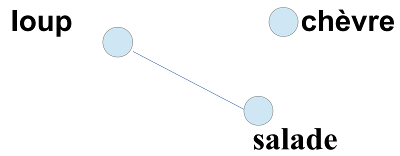
Comme ici on cherche la valeur minimale de P, il suffit de prendre P= $\left\lceil \dfrac{\max(A,C)}{\mathrm{P}-\min(A,C)} \right\rceil$.(6)

Donc dans chaque cas on sait calculer au minimum de combien de places on a besoin. Si une situation entre dans plusieurs cas, il suffit de calculer le résultat pour chacun des cas et de prendre le minimum.

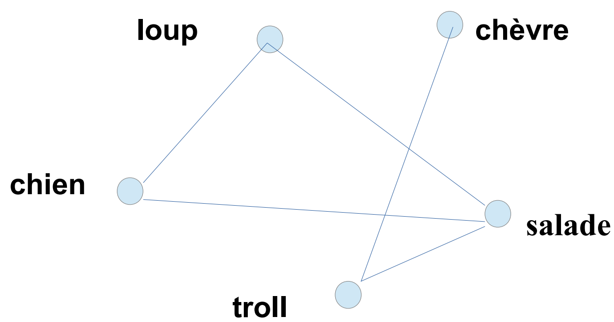
V. Conclusion

Nous avons quasiment résolu (car nous ne sommes pas sûr pour le nombre minimum de coups car la formule n'est pas forcément optimale) le problème avec n'importe quel nombre de loups, chèvres, salades. Mais que se passerait-il si on rajoutait un troll, qui mangerait le loup? Ou bien si la salade mangeait le loup (une espèce de poules, renards, vipères) ?
Nous avons essayé de modéliser cela par des graphes. On va choisir de relier deux types d'objets s'ils cohabitent (comme ici le loup et la salade). Nous savons donc qu'un sous-graphe complet et isolé forme en fait une seule catégorie d'objets (comme ici le loup et la salade). Mais ce n'est pas une condition nécessaire: il suffit en fait que les sommets de notre sous-graphe complet aient les mêmes voisins dans le reste du graphe pour pouvoir les considérer comme une seule catégorie. Nous n'avons pas encore de résultats liés aux graphes, et comme nous nous sommes contentés des catégories du problème de base, cette méthode n'est pas forcément la plus intéressante, mais nous pensons qu'en envisageant d'autres liens entre les objets (par exemple en introduisant le troll), il serait intéressant de pousser cette recherche.

Exemple de graphe dans le problème de base :



Un autre exemple avec un troll qui mange le loup, et un chien qui cohabite avec le loup et la salade (et pas avec les autres, donc se fait manger par le troll, mange la chèvre).



(Ici le loup et la salade n'ont pas la même relation avec le troll, donc on ne peut plus les considérer comme un groupe. Par contre le loup et le chien cohabitent et ont les mêmes voisins, donc on peut les regrouper en une seule catégorie.)

Notes d'édition

(1) Ce qui est désigné ici par *partie supérieure* est la *partie entière par valeur supérieure.*

(2) Si on se base sur la procédure décrite en page 4 (prendre toujours toutes les chèvres dans le bateau et remplir à chaque aller le reste de place avec d'autres animaux) on devrait obtenir la partie entière par valeur supérieure de A/(P-C) et non pas celle par valeur inférieure.

(3) On peut faire la même remarqe que dans la note 2.

(4) La distinction de cas possibles et impossibles a été faite en deuxième partie.

Le cas « A=P et C<= 2P » ne semble pas traité dans les deux cas ici présentés.

(5) On aurait pu justifier pourquoi cette égalité est vérifée. On aurait pu distinguer les cas où la quantité P-min(A,C) est positive, négative, nulle, avant de poser cette égalité.

(6) On peut regretter un manque de justification et de rigueur dans cette démonstration.