Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Lever un crayon

MATh.en.JEANS

2014 – 2015

Participants. Olivier Fayet, Thomas Peroumal, Nicolas Planard-Luong, Paul Rax (classe de seconde)

Établissement. Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignants. Didier Missenard, Denis Julliot, Nicolas Ségarra

Chercheurs. Nicolas Burq, Tiago Jardim da Fonseca (Université Paris-Sud 11)

Table des matières

Introduction

I. Problème

Il est possible de dessiner les figures suivantes (Figure 1) en un ou deux coups de crayon, sachant qu'il est interdit de repasser deux fois sur le même segment.

Comment savoir, au premier regard, combien de coups de crayon seront nécessaires pour reproduire une figure ? Existe-t-il une méthode pour parvenir à tracer cette figure en un minimum de coups de crayon ?

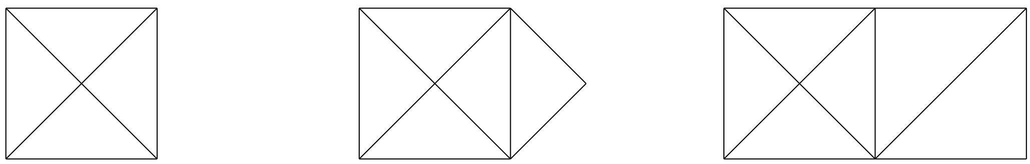

Figure 1 — *Exemples de figures.*

II. Définitions et remarques préliminaires

Graphe. Une figure est représentée par un graphe dont les arêtes sont les segments de ladite figure et dont les sommets, en nombre fini, en sont des points. On cherche ainsi à parcourir une et une seule fois chaque arête du graphe.

Chemin. On nomme chemin un coup de crayon : il s'agit d'une suite continue d'arêtes du graphe. Un chemin est terminé lorsque le crayon se lève ; on peut alors en commencer un nouveau pour continuer le tracé de la figure.

On note $\boldsymbol{x}$ le nombre minimal de chemins nécessaires pour tracer la figure.

Graphe connexe. Un graphe est dit connexe s'il existe au moins un chemin reliant deux sommets quelconques. Un graphe non connexe est composé de plusieurs « morceaux » connexes séparés (qu'aucun chemin ne peut relier) que l'on nommera **composantes connexes**.

FIGURE 2 — *Graphe connexe, et un autre, non connexe, constitué de deux composantes connexes*

Indices. Pour chaque sommet du graphe, on définit un indice égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

On note $\boldsymbol{q}$ le nombre de sommets d'indice impair du graphe.

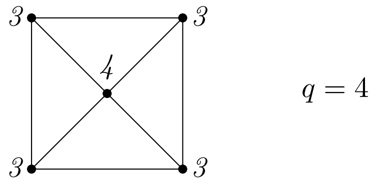

FIGURE 3 — *Indices des sommets.*

Méthode de tracé. Partant du graphe représentant la figure de départ, on choisit *d'en effacer les arêtes au fur et à mesure que le crayon les trace*, considérant de fait celui-ci comme une gomme. Ainsi, le graphe *évolue* au cours du tracé. À chaque étape du tracé, le graphe restant est une représentation des segments de la figure qu'il reste à parcourir. Le graphe est entièrement tracé lorsque l'indice associé à chaque sommet devient nul.

Étape de tracé. Une nouvelle étape du tracé est atteinte à chaque tracé d'une arête.

Graphe d'origine et graphe restant. On désignera par graphe d'origine le graphe représentant la figure à tracer dans sa totalité. À une étape du tracé, on désignera par graphe restant le graphe symbolisant les segments de la figure qu'il reste à tracer. [1]

Résolution du problème

On s'intéressera dans un premier temps aux graphes connexes constitués exclusivement de sommets d'indice pair, puis aux graphes connexes comportant des sommets d'indice impair. La démonstration sera ensuite étendue à l'ensemble des cas (graphes connexes et non connexes).

III. Graphes connexes

III.1. Graphes vérifiant $q = 0$ (absence de sommets d'indice impair)

Nous verrons qu'il est possible de tracer un graphe connexe ne comportant que des sommets d'indice pair en un seul coup de crayon ; on comprend que ce résultat ne peut être atteint que si l'on choisit de continuer le tracé d'un chemin tant que cela est possible (donc de n'arrêter le tracé d'un chemin que lorsque l'on arrive sur un sommet d'où l'on ne peut plus repartir).

Lemme 1.1. Dans un graphe quelconque vérifiant $q = 0$, les extrémités d'un chemin sont confondues (à condition de continuer le tracé de celui-ci tant que cela est possible).

Démonstration. *À chaque fois que l'on trace une arête pour arriver sur un sommet, et que l'on en repart, l'indice de ce sommet est diminué de deux, donc conserve sa parité ; celui-ci étant pair au départ, il ne sera jamais égal à 1. Or une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir repartir d'un sommet après avoir tracé une arête est que l'indice de ce sommet ait été auparavant différent de 1. Il est donc toujours possible de repartir d'un sommet différent du sommet de départ du chemin.*

En revanche, lorsque l'on commence le tracé d'un chemin, on enlève du graphe une seule arête ayant le sommet de départ du chemin pour extrémité : celui-ci change de parité et devient d'indice impair. Par la suite, si l'on arrive sur ce sommet et que l'on en repart, son indice diminue de deux, restant impair : cet indice pourra donc, à une étape du tracé, devenir égal à 1. Le chemin est donc terminé si l'on retourne au sommet de départ du chemin lorsque son indice vaut 1.

Par conséquent, il est toujours possible, à chaque étape, de continuer le tracé d'un chemin pour retourner à son sommet de départ, et ce, jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de repartir de ce sommet.

Cette propriété est essentielle pour faire apparaître une condition pour tracer n'importe quel graphe exclusivement constitué de sommets d'indice pair *en un seul coup de crayon.*

Théorème 1.2. Un graphe connexe quelconque vérifiant $q = 0$ est tracé en un seul coup de crayon si et seulement si à chaque étape du tracé, le graphe restant à tracer est connexe, et si le sommet de départ du chemin en est l'un des sommets (on peut partir de n'importe quel sommet).

Démonstration du caractère nécessaire de la condition. *Prenons un graphe quelconque avec* $q = 0$*, partons d'un sommet et commençons à tracer un chemin. On continue le tracé tant que cela est possible ; le sommet d'arrivée du chemin sera son sommet de départ (théorème 1.1). Il apparaît immédiatement qu'il faut veiller, chaque fois que l'on souhaite tracer une arête, à ce que le graphe soit toujours connexe, faute de quoi il serait impossible d'en tracer le reste sans lever le crayon.*

Il est également nécessaire qu'à chaque étape du tracé, le sommet de départ du chemin appartienne au graphe restant. Cela se comprend facilement : le chemin tracé se terminera sur le sommet d'où le crayon est parti, mais le crayon doit pouvoir repartir de ce sommet tant que le graphe n'est pas entièrement tracé, donc il est nécessaire qu'à chaque étape du tracé, le sommet de départ du chemin soit un sommet du graphe restant à tracer.

Démonstration du caractère suffisant de la condition. *Lorsque l'on trace un chemin en satisfaisant à la condition précédente, on retourne à un moment donné au sommet de départ — donc d'arrivée — de ce chemin (lemme 1.1). À chaque fois que le crayon arrive sur ce sommet de départ, si la figure n'est pas entièrement tracée, il reste à tracer un graphe connexe entièrement constitué de sommets d'indice pair dont l'un des sommets est le sommet sur lequel se trouve le crayon. On se retrouve donc dans une configuration similaire à la précédente mais comportant un nombre strictement inférieur d'arêtes. Ainsi, le crayon reviendra toujours sur son sommet de départ et il sera toujours possible d'en repartir sans le lever, jusqu'au moment où toute la figure sera tracée.*

Nous avons donc établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe vérifiant $q = 0$ ait été tracé en un seul coup de crayon. Il faut maintenant montrer qu'il existe au moins une manière de tracer un graphe quelconque en un seul coup de crayon. Pour ce faire, on peut montrer qu'à n'importe quelle étape du tracé, si le sommet de départ du chemin appartient au graphe restant et que celui-ci est resté connexe durant toutes les étapes antérieures, alors il existe au moins une arête que l'on peut tracer de sorte que ces conditions soient toujours vérifiées.

Propriété 1.3. La condition du théorème 1.2 est vérifiable à chaque étape du tracé, pourvu qu'elle ait été respectée lors des étapes précédentes.

Démonstration. *Partons d'un graphe et commençons le tracé d'un chemin. Supposons qu'à un point, le tracé d'une arête aurait pour conséquence d'isoler une composante connexe $\mathcal{G}'$du graphe du sommet de départ du chemin (c'est-à-dire que le sommet de départ du chemin ne serait pas un sommet de $\mathcal{G}'$). Le fait de tracer l'arête aurait pour effet de séparer deux (et seulement deux) composantes connexes, l'une comportant le sommet de départ du chemin (cette composante peut ne comporter aucun autre sommet, donc être d'indice nul), et l'autre étant composée de sommets d'indice pair. À ce moment, il convient de ne pas séparer le graphe en plusieurs composantes connexes. Si l'on emprunte n'importe quelle arête ne conduisant* pas*vers la composante connexe qui comporterait le sommet de départ, il existe nécessairement un chemin permettant au crayon de retourner à son sommet de départ (lemme 1.1), donc le graphe est nécessairement toujours connexe. À chaque étape du tracé, il existe donc toujours au moins une arête qu'il est possible de tracer de sorte que le graphe restant soit connexe, et qu'il contienne le sommet de départ du chemin.*

Conclusion. Un graphe connexe quelconque vérifiant $q = 0$ est tracé en un seul coup de crayon si et seulement si, à chaque étape du tracé, le graphe restant à tracer est connexe, et le sommet de départ du chemin en est l'un des sommets (théorème 1.2). Comme il est possible de respecter cette condition à chaque étape du tracé [2] (pourvu qu'elle ait été respectée lors des étapes précédentes), il existe donc une méthode de tracé optimale que l'on peut résumer de manière simple :

1. Partir d'un sommet et tracer un chemin à son gré en vérifiant, à chaque tracé d'arête, que le graphe restant à tracer est connexe et que le sommet de départ du chemin en est l'un des sommets.
2. N'arrêter le tracé de ce chemin que lorsque tous les sommets sont d'indice 0.

On a donc $x = 1$ (un seul coup de crayon). [3]

III.2. Graphes vérifiant $q > 0$ (présence de sommets d'indice impair)

Une première étape de la démonstration consiste à montrer que le nombre minimal de coups de crayon à tracer ne peut être inférieur à $\frac{q}{2}$.

Lemme 2.1. Pour tout graphe, q est pair.

Démonstration. *Si l'on prend la somme des indices de tous les sommets du graphe, on ajoute le total des indices pairs (qui est donc pair) et le total des indices impairs (qui possède la même parité que le nombre de sommets d'indice impair) : un nombre impair de sommets d'indice impair impliquerait que cette somme soit impaire. Or cela est impossible : l'indice d'un sommet est égal au nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité ; donc, si l'on prend la somme des indices de tous les sommets du graphe, on obtient la somme du nombre d'extrémités de chaque arête, ce qui correspond au double du nombre d'arêtes du graphe, et est donc forcément pair.*

Théorème 2.2. Il n'est pas possible de tracer un graphe quelconque en moins de $\frac{q}{2}$ coups de crayon.

Démonstration. *Le fait d'arriver sur un sommet et d'en repartir diminue son indice de deux. Le fait de partir d'un sommet (début d'un chemin) ou d'y arriver et de lever le crayon (fin du chemin) fait diminuer son indice d'un. Par ailleurs, quand un chemin passe par un sommet qui n'est pas l'une de ses extrémités, ce sommet voit son indice diminué d'un nombre pair, donc conserve sa parité. Ainsi, seuls les sommets situés aux extrémités d'un chemin, s'ils sont distincts, changent de parité.*

Or, pour tracer la figure, il faut que tous les sommets du graphe deviennent d'indice nul ; pour qu'un sommet d'indice impair devienne d'indice nul, il est donc nécessaire *que ce sommet soit une extrémité d'au moins un chemin. Chaque chemin a deux extrémités : si un chemin commence et se termine sur deux sommets d'indice impair distincts, aucun sommet d'indice pair n'est créé, tandis que deux sommets d'indice impair deviennent pairs. D'après le lemme 2.1, q est pair : si l'on procédait de même pour chaque chemin, il n'existerait plus de sommet d'indice impair dans la figure au bout de $\frac{q}{2}$ chemins tracés. Le nombre minimal de coups de crayon nécessaire pour tracer une figure ne peut donc être inférieur à $\frac{q}{2}$.*

Nous allons maintenant voir qu'il est possible de tracer n'importe quel graphe [4] comportant des sommets d'indice impair en $\frac{q}{2}$ coups de crayon.

Pour qu'un sommet d'indice impair devienne d'indice pair, il faut que ce sommet soit au moins une extrémité d'au moins un chemin (cf. démonstration de la propriété 1.2). Nous allons donc montrer, dans un premier temps, que tout chemin commencé sur un sommet d'indice impair se terminera sur un autre sommet d'indice impair, à condition de ne lever le crayon que lorsque l'on arrive sur ce sommet — ce qui est toujours possible.

Lemme 2.3. Il est toujours possible de continuer le tracé d'un chemin commencé sur un sommet d'indice impair, jusqu'à ce que ce chemin se termine sur un sommet dont l'indice était impair avant le tracé du chemin, et distinct du sommet de départ.

Démonstration. *Partons d'un sommet d'indice impair. Le fait d'arriver sur un sommet et d'en repartir (sans lever le crayon) diminue son indice de deux donc ne change pas sa parité. Un sommet d'indice pair sur le graphe d'origine (distinct du sommet de départ du chemin) gardera ainsi toujours sa parité. Il sera donc toujours possible d'en repartir jusqu'à ce que ce sommet devienne d'indice nul — et, à ce moment, il ne sera plus possible de revenir ultérieurement sur ce sommet donc d'y être bloqué. Il en est de même pour le sommet de départ du chemin, dont l'indice devient pair et le reste durant le tracé. Par conséquent, il sera toujours possible de repartir d'un sommet d'indice pair sur le graphe d'origine, ainsi que du sommet de départ du chemin ; et ce, jusqu'à ce que le crayon se trouve bloqué sur un sommet distinct du sommet de départ dont l'indice était impair sur le graphe d'origine.*

Théorème 2.4. Un graphe quelconque est tracé en $\frac{q}{2}$ coups de crayon si et seulement si chaque chemin est commencé et terminé sur des sommets distincts dont l'indice était impair avant le tracé dudit chemin, et si, et seulement si, à chaque étape du tracé, chaque composante connexe du graphe restant comporte des sommets d'indice impair (il ne doit pas exister de composante connexe du graphe restant qui ne comporte pas de sommet d'indice impair), ou le sommet courant [1].

Démonstration du caractère nécessaire de la 1^re^ condition. *Pour tracer le graphe, il est nécessaire que chaque sommet d'indice impair du graphe soit une (et une seule) extrémité d'un seul chemin. Si l'on parvient à tracer entièrement la figure en commençant et terminant chaque chemin sur un sommet d'indice impair, et en n'en traçant ainsi en tout et pour tout que $\frac{q}{2}$, alors elle aura été tracée en un minimum de coups de crayon, puisqu'il n'aurait pas été possible d'en faire moins (théorème 2.2).*

Démonstration du caractère nécessaire de la 2^de^ condition. *Si une composante connexe du graphe ne comporte aucun sommet d'indice impair, ni le sommet courant, cela signifie qu'il n'est pas possible qu'elle soit tracée sans commencer un nouveau chemin ; il*

1. C'est-à-dire le sommet sur lequel se situe le crayon alors qu'il n'a pas fini de tracer un chemin.

sera donc nécessaire, afin de la tracer, de rajouter un coup de crayon, ayant pour sommet de départ un sommet d'indice pair. Il est donc nécessaire, afin de tracer le graphe en un minimum de coups de crayon, et si cela est possible, de ne jamais tracer une arête dont le tracé aurait pour effet de créer une composante connexe entièrement constituée de sommets d'indice pair — nous verrons que cela est toujours possible et qu'il est facilement possible de respecter cette condition[2].

Démonstration du caractère suffisant des deux conditions. *Dans le cas où les conditions ont été respectées, chaque composante connexe du graphe contient au moins un sommet d'indice impair, ou le sommet courant. Chaque chemin ayant pour extrémités deux sommets distincts d'indice impair, cela signifie qu'un chemin ayant pour sommet de départ ce sommet d'indice impair, ou alors le chemin courant dans le cas où la composante connexe du graphe le contient, pourra la tracer entièrement ultérieurement. Tant que les conditions sont respectées, chaque composante connexe contient ainsi un sommet d'où le crayon pourra la tracer. On comprend aisément qu'au final, la figure sera nécessairement entièrement tracée.*

Traçons un chemin : les sommets qui ne sont pas situés à ses extrémités conservent leur parité. Les sommets situés à ses extrémités (s'ils sont distincts), eux, changent de parité. Chaque chemin commence et se termine sur des sommets distincts dont l'indice était impair avant le tracé dudit chemin, donc, pourvu que la première condition ait été respectée durant toutes les étapes précédentes, chaque chemin commence et se termine donc sur des sommets distincts dont l'indice est impair sur le graphe d'origine. *Cela a pour effet de diminuer q de 2 à chaque tracé de chemin. Comme q est pair, si les deux conditions restent vérifiées à chaque étape de tracé, alors le graphe sera effectivement tracé en $\frac{q}{2}$ coups de crayon.*

Ce théorème permet également, comme pour le cas étudié plus haut, de faire apparaître une méthode pour tracer n'importe quel graphe en $\frac{q}{2}$ coups de crayon.

Propriété 2.5. Les conditions énoncées dans le théorème 2.4 sont vérifiable à chaque

2. On pourra se demander pourquoi il est nécessaire de mentionner dans la condition que celle-ci est respectée s'il existe une composante connexe du graphe ne comportant aucun sommet d'indice impair, mais dans laquelle se situe le sommet courant. En effet, le chemin en cours de traçage se termine nécessairement sur un sommet dont l'indice était impair avant le tracé du chemin. Mais, si la composante connexe dans laquelle se trouve le sommet courant ne comporte aucun sommet d'indice impair, c'est nécessairement que le sommet d'arrivée du chemin est le sommet sur lequel il se situe, sommet qui redeviendra impair une fois que le crayon l'aura quitté. Il sera donc ainsi possible, comme nous le verrons plus tard, de tracer entièrement la composante connexe pour terminer le chemin sur ce sommet.

étape du tracé, pourvu qu'elles aient été respectées durant toutes les étapes antérieures.

Démonstration : 1re condition. *La première condition est vérifiable à chaque étape du tracé, puisqu'il est toujours possible de continuer le tracé du chemin jusqu'à un sommet dont l'indice était impair avant son tracé (lemme 2.3).*

Démonstration : 2de condition. *Il reste donc à montrer qu'il est possible de vérifier la seconde condition à chaque étape du tracé. Partons d'un sommet d'indice impair et commençons le tracé d'un chemin. Les conditions sont vérifiées dès le départ, donc chaque composante connexe du graphe restant comporte ou des sommets d'indice impair, ou le sommet courant, ou éventuellement les deux.*

Il est toujours possible de continuer le tracé de ce chemin jusqu'à arriver sur un sommet d'indice impair, d'où il ne sera peut-être pas possible de repartir (lemme 2.3). Supposons qu'à un point, le tracé d'une arête aurait pour conséquence d'isoler une composante connexe $\mathcal{G}'$ *du graphe de tout sommet d'indice impair (c'est-à-dire* $\mathcal{G}'$ *serait uniquement composé de sommets d'indice pair), et du sommet courant. Le fait de tracer l'arête aurait pour effet de séparer deux (et seulement deux) composantes connexes, l'une comportant tous les sommets potentiels d'arrivée du chemin (cette composante peut ne comporter aucun autre sommet, donc ne comporter qu'un seul sommet d'indice nul), et l'autre étant composée de sommets d'indice pair. À ce moment, il convient de ne pas séparer le graphe en plusieurs composantes connexes. Si l'on emprunte n'importe quelle arête ne conduisant* pas *vers la composante connexe qui comporterait les sommets d'arrivée du chemin, il existe nécessairement un chemin permettant au crayon de retourner à un sommet d'indice impair (lemme 2.3), donc le graphe est nécessairement toujours connexe. À chaque étape du tracé, il existe donc toujours au moins une arête qu'il est possible de tracer de sorte que chaque composante connexe du graphe restant comporte des sommets d'indice impair ou*[3] *le sommet courant.*

Conclusion. Comme il n'est pas possible de tracer un graphe en moins de $\frac{q}{2}$ chemins (théorème 2.2), la méthode trouvée permet bien de tracer n'importe quelle figure vérifiant $q > 0$ en un minimum de coups de crayon.

3. Ce « ou » n'est bien évidemment pas exclusif.

III.3. Graphes connexes : conclusion

Dans le cas d'un graphe connexe (contenant au moins une arête), il est possible de répondre au problème posé de la manière suivante :

$$\begin{cases} q = 0 \Rightarrow x = 1 , \\ q > 0 \Rightarrow x = \frac{q}{2} ; \end{cases}$$

ou, de manière plus concise,

$$x = \max\left\{ 1 ;\ \frac{q}{2} \right\},$$

c'est-à-dire que le nombre de coups de crayon nécessaires sera la plus grande valeur entre $\frac{q}{2}$ et 1.

IV. Généralisation et conclusion

Plaçons-nous maintenant dans un cas plus général : le graphe à tracer n'est pas forcément connexe. Dans ce cas, il convient de tracer chaque composante connexe séparément (la méthode pour reproduire une figure de manière optimale ne sera par conséquent pas abordée de nouveau ici), et donc de prendre la somme du nombre de coups de crayon nécessaires pour tracer chaque partie.

Pour un graphe comprenant p composantes connexes, et dont on note q_n le nombre de sommets d'indice impair constituant la n-ième composante, on peut répondre au problème posé de la manière suivante :

$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{p} \max\left\{ 1 ;\ \frac{q_n}{2} \right\}.}$$

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toute l'équipe des enseignants — Didier Missenard, Denis Julliot, Nicolas Ségarra — et des chercheurs — Nicolas Burq, Tiago Jardim da Fonseca — pour leur aide et leur soutien apportés à la construction de ce projet durant toute l'année.

Notes d'édition :

— [1] Il importe de bien comprendre la démarche utilisée dans cet article, et expliquée ici : on construit progressivement un chemin sur le graphe, et au fur et à mesure qu'on a utilisé des arêtes dans le chemin, on les efface du graphe (au moins en pensée).

— [2] Par la propriété 1.3.

— [3] La méthode décrite ici et issue de la preuve, n'est pas réellement algorithmique ; en effet, la preuve montre qu'à chaque étape, il y a moyen de continuer, mais elle ne dit pas explicitement comment.

— [4] Rappelons que, dans toute cette section, on considère des graphes connexes (sans quoi cette affirmation serait fausse)