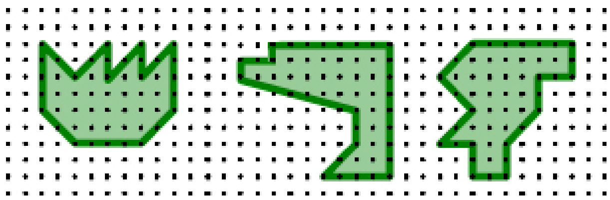
Les vergers

BRUNI Julie, MICHALLON Lisa, PAULIN Johanna, SLIM Aymelle, ZGAREN Myriam (3ème)

Collège Jules Vallès – Fontaine (38)
Enseignants : Anne VOLTOLINI, Jean-Christophe CUBERTAFON
Chercheur(s) : Grégory BERHUY



Le sujet

Comment comparer les aires de vergers polygonaux dont les arbres sont situés sur un réseau carré ?

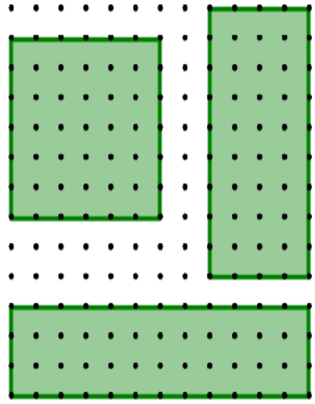
Mots-clés

VERGER, AIRE, CONTOUR, RÉSEAU CARRÉ, POLYGÔNE, FORMULE DE PICK.

Nous avons comparé les aires des vergers polygonaux dont les arbres sont situés sur un réseau carré.

Nous avons calculé l'aire, le périmètre, compté les arbres autour et à l'intérieur. Nous avons remarqué que [pour les vergers de la figure ci-contre à gauche,] le nombre d'arbres autour et intérieurs est le même pour chaque verger de même aire. [Les aires sont également les mêmes].

Nous avons construit des vergers rectangulaires de même aire.

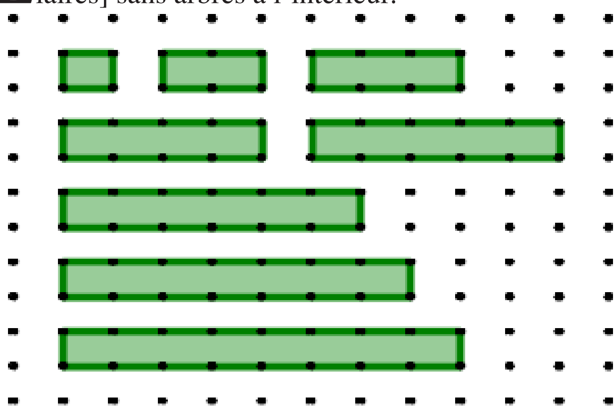


Puis nous avons fait un tableau avec leur taille, le nombre d'arbres sur le contour et à l'intérieur.

Taille	Contour	Intérieur
6x6	24	25
4x9	26	24
3x12	30	22
2x18	40	17

Nous avons remarqué que lorsque le nombre d'arbre sur le contour augmentait de 2, alors le nombre d'arbres intérieurs diminuait de 1.

Ensuite nous avons essayé des vergers [rectangulaires] sans arbres à l'intérieur.



Nous avons remarqué que quand on ajoutait 1 à leurs aires, le nombre obtenu était égal à la moitié du nombre d'arbres du contour.

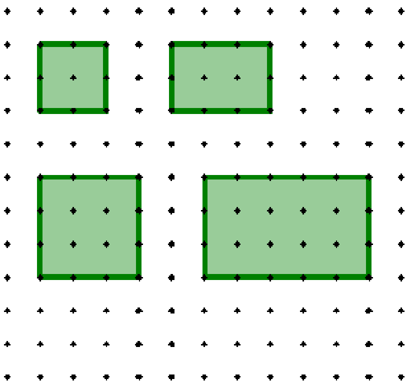
Contour	Aire	Aire + 1
4	1	2
6	2	3
8	3	4
10	4	5
12	5	6
14	6	7
16	7	8
18	8	9

Nous avons donc trouvé une formule pour un verger sans arbre à l'intérieur.

$$\text{Aire} = \frac{\text{Contour}}{2} - 1 \qquad \textbf{Formule 1}$$

[Cette formule observée pour les rectangles semble vraie pour tous les vergers sans arbres intérieurs, même non rectangles]

Nous avons alors construit des vergers rectangulaires avec arbres intérieurs.



Puis grâce à un tableau :

Contour	Intérieur	Aire	Formule 1	Manque
8	1	4	3	1
10	2	6	4	2
12	4	9	5	4
16	8	15	7	8

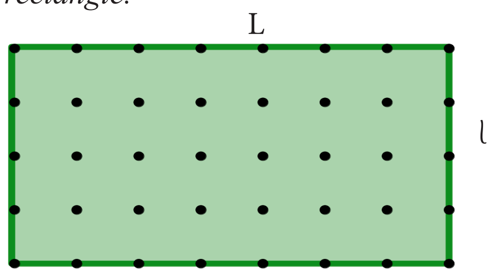
Nous avons remarqué une formule pour des vergers avec arbres intérieurs :

$$\text{Aire} = \frac{\text{Contour}}{2} + \text{Intérieur} - 1 \qquad \textbf{Formule 2}$$

[Cette formule, observée pour les rectangles semble vraie pour tout verger polygonal]

Et nous avons commencé à démontrer la formule trouvée...[dans deux cas particuliers]

• Nous avons retrouvé la formule de l'*aire du rectangle.*



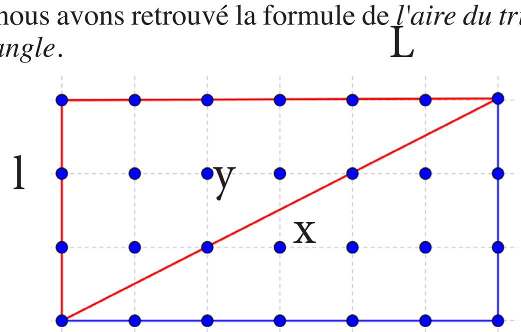
Le nombre d'arbres sur le contour est 2(L+1)+2(l+1)

Le nombre d'arbres à l'intérieur est (L-1)(l-1)

Notre formule donne alors :

$$\begin{aligned} Aire &= \frac{contour}{2} + intérieur - 1 \\ &= \frac{2(L+1)+2(l-1)}{2} + (L-1)(l-1) - 1 \\ &= L+1+l-1+L\times l - L - l + 1 - 1 \\ Aire &= L \times l \end{aligned}$$

• Et nous avons retrouvé la formule de *l'aire du triangle rectangle*.



On appelle x le nombre d'arbres sur la diagonale [sans compter les extrémités] et y le nombre d'arbres à l'intérieur du triangle.

[Le nombre d'arbres intérieur i vaut dans le rectangle :

$$\text{et} \quad \begin{aligned} i &= (L-1)(l-1) \\ i &= 2y + x \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x = (L-1)(l-1) - 2y$$

Dans le triangle rectangle, le nombre d'arbres i' vaut i'=y

Donc le nombre d'arbres sur le contour, C' vaut :

$$C' = L+1+l+x = L+1+l+(L-1)(l-1)-2y$$
$$C = L \times l - 2y + 2$$

Ainsi :

$$\frac{C'}{2} + i' - 1 = \frac{L\times l - 2y + 2}{2} + y - 1$$

Soit :

$$\frac{C'}{2} + i' - 1 = \frac{L \times l}{2}$$

[CQFD]

Des vergers avec des « trous »

Nous nous sommes ensuite intéressées à des vergers avec des trous, [nous avons traité le cas] des trous unités.

On note [les nombres importants comme suit] :

C : arbres sur le contour extérieur
I : arbres à l'intérieur sans les trous
i : arbres à l'intérieur avec les trous
A : l'aire sans les trous
a : l'aire avec les trous

On applique la formule (2) pour déterminer l'aire du verger sans trou. Pour tenir compte du trou, on remplace A par $a+1$ et I par $i+4$ et on obtient une nouvelle formule :

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{2}+I-1 \quad \text{[devient]} \\ a+1 &= \frac{C}{2}+i+4-1 \quad \text{[soit]} \\ a &= \frac{C}{2}+i+4-2 \\ &= \frac{C}{2}+i+2 \\ a &= \frac{C+4}{2}+i \end{aligned}$$

Nous avons procédé en raisonnant de façon similaire pour tenter de généraliser cette formule dans le cas où les vergers contiennent plusieurs trous unités disjoints.

Pour un verger avec 2 trous, on obtient :

$$a=\frac{C+8}{2}+i+1$$

Pour un verger avec 3 trous, on obtient :

$$a=\frac{C+12}{2}+i+2$$

Ainsi, nous avons fait la **conjecture** suivante, si n est le nombre de trous unité disjoints :

$$a=\frac{C+4n}{2}+i+n-1$$

Ensuite, nous avons **démontré** cette formule.
[Nous savons que] $a=A-n$ et $i=I-4n$, [la formule à démontrer s'écrit donc sous la forme équivalente suivante] :

$$\begin{aligned} a &= \frac{C+4n}{2}+i+n-1 \\ A-n &= \frac{C+4n}{2}+I-4n+n-1 \\ A-n &= \frac{C}{2}+2n+I-4n+n-1 \\ A &= \frac{C}{2}+2n+I-4n+n-1+n \\ A &= \frac{C}{2}+I-1 \end{aligned}$$

Ce qui prouve notre conjecture ! [sous l'hypothèse que la dernière formule est vraie, ce qui a été validé pour les rectangles et les triangles rectangles]

Et nos travaux se terminent avec cette démonstration !

***