Les soustractions infernales

Année 2014-2015

Élèves : Mathis Ranjard ; Lucas Verger ; Angèle Foulonneau ; Eliott Petiteau ; Ethan Grandisson en classe de $5^{ème}$

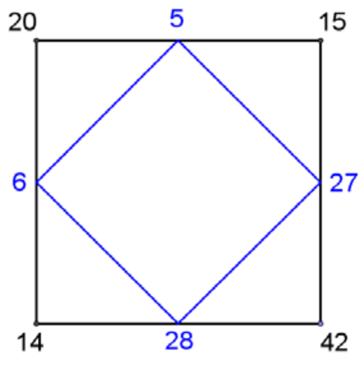
Etablissement : Collège de l'Evre, Montrevault (Maine et Loire)

Professeurs : M.Raveleau ; M.Alloschery ; Mme Raveleau-Picoulet

Chercheur : Thomas Wallez, université de Nantes

Le Sujet

Au Texas il existe un exercice en école primaire pour apprendre les soustractions. L'enseignant donne 4 nombres entiers positifs. Les élèves tracent un carré et notent les nombres aux sommets du carré. Ensuite, à chaque milieu des côtés du carré, les élèves notent la soustraction entre les nombres présents aux sommets. Ils retracent alors un carré dans le carré qui a pour sommets les résultats des soustractions. Et recommencent ainsi de suite jusqu'à ce que tous les nombres soient 0 et le jeu se termine.



Les questions posées

Est-ce que cela se termine toujours ? Si oui pourquoi ?

Que se passe-t-il avec un autre polygone ?

Conjectures et résultats :

<u>Pour le carré</u>, nous pensons que ça se termine toujours.

Nous n'en sommes pas sûrs car nous ne pouvons pas le prouver, se serait trop long d'essayer avec tous les nombres mais nous avons repéré des cas qui nous permettent de répondre en indiquant le nombre d'étapes nécessaires.

Nous sommes sûrs que ça se termine :

En 1 étape avec 4 nombres égaux.
En 4 étapes avec 3 nombres égaux.
En 2 ou 3 étapes avec 2 paires de nombres égaux.
En 4 étapes quand il y a une seule diagonale avec deux nombres égaux.

Nous n'avons pas eu le temps de prouver que ça s'arrête dans les autres cas.

<u>Pour le triangle</u>, nous pouvons démontrer que cela ne se termine pas toujours.

I. Avec un carré

1) Idées, remarques

Nous avons remarqué que :

- On ne va pas dans les nombres négatifs, on reste dans les positifs et il n'y a que des nombres entiers donc le plus petit est zéro.
- Plus les nombres se soustraient, plus ils sont petits.
- Après soustraction, le résultat reste le même ou diminue.
- Plus les nombres se ressemblent en grandeur, moins il y a d'étapes.
- Quand on soustrait deux nombres impairs on obtient un nombre pair.
- Un nombre impair moins un nombre pair est égal à un nombre impair.
- Quand les 4 nombres de base sont tous pairs ou tous impairs, il n'y aura que des nombres pairs dans le carré.

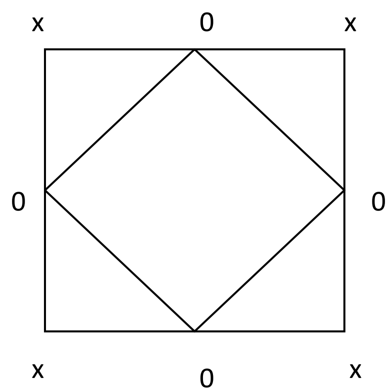
- Nous sommes sûrs que les soustractions infernales s'arrêtent quand on repère des nombres identiques.

2) Démonstrations

On a cherché tous les cas possibles de nombres qu'il pouvait y avoir à chaque sommet du carré.

On a identifié des cas particuliers :

a) Quatre nombres identiques à chaque sommet



Pour représenter n'importe quel nombre entier positif, on utilise la lettre x.

$x - x = 0$

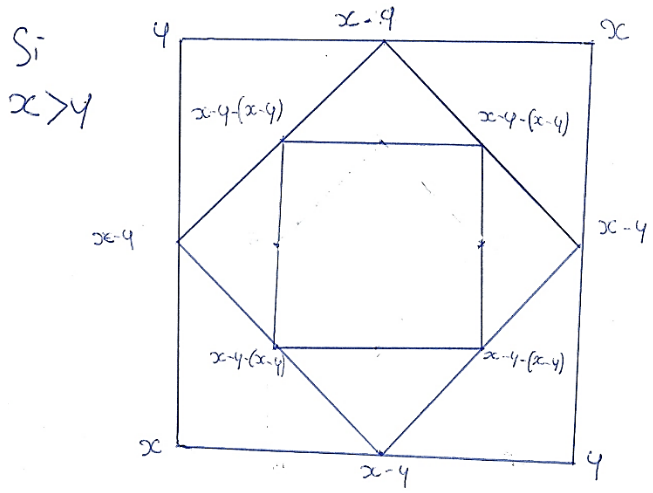
Le carré se termine en une étape.

b) <u>Nombres égaux sur les diagonales</u>

$x > y$

$(x - y) - (x - y) = 0$

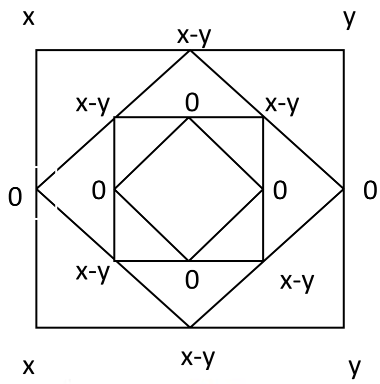
Le carré se termine en 2 étapes.



c) <u>Nombres égaux côte à côte</u>

Après la première étape,
les nombres sont égaux en diagonale.

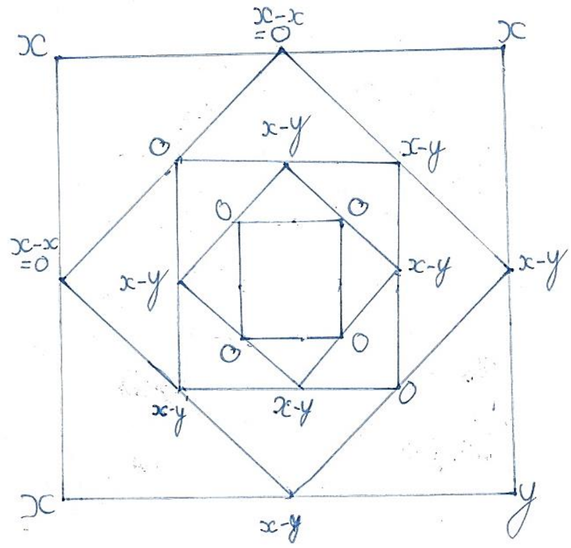
Le jeu se termine en 3 étapes.



d) <u>Trois nombres égaux</u>

Si $x > y$

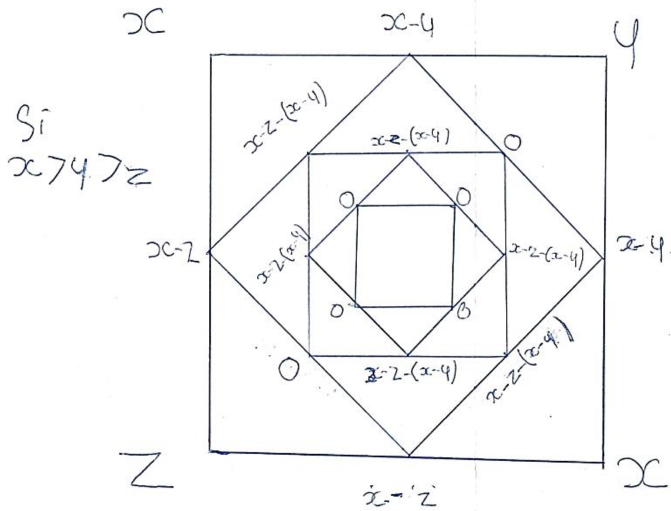
le carré se termine en 4 étapes.



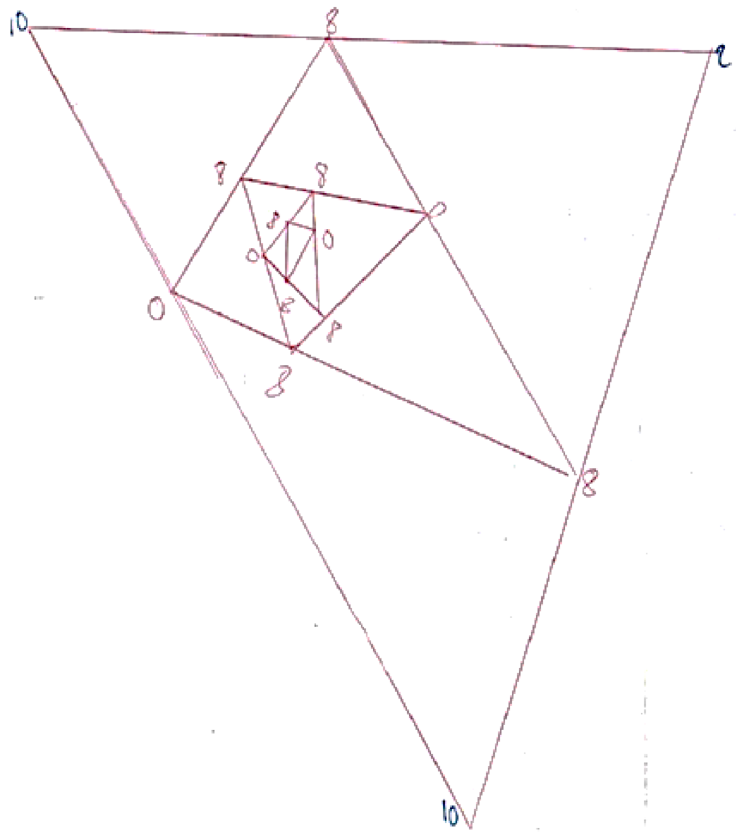
e) <u>Une seule diagonale avec des nombres égaux</u>

Si $x > y > z$

le carré se termine en 4 étapes.



II. Avec un triangle



Le contre-exemple ci-contre nous a aidés à dire qu'avec un triangle cela ne se termine pas toujours : les nombres peuvent se réduire au minimum possible puis tourner en rond et rester identiques.

Conclusion : Nous pouvons démontrer qu'avec un triangle cela ne se termine pas toujours.

Notes d'édition

Aucune note