Les prisonniers et les chapeaux

Année 2017 – 2018

Élèves : Mathéo ANTOINE-WILL, Théo FRAYARD, Jean GOUDOT, Clément L'HÔTE (première S), Adrien MARCHAL-HERBER (première ES), Morgane ROUX et Chloé WIATT (terminale S)

Encadrés par Mme Christine FABRY et M. Patrick MARCOLÉ

Établissement : Lycée Ernest Bichat, Lunéville

Chercheur : M. Robin RIBLET, Université de Lorraine

Présentation du sujet

Imaginons que nous sommes dans une prison avec 100 prisonniers. Le directeur de la prison leur propose de jouer afin de gagner leur libération.

Chaque prisonnier est placé sur une marche d'un escalier de 100 marches. Le directeur place un chapeau, soit blanc, soit noir, sur la tête de chaque prisonnier. Ils ne peuvent voir que les chapeaux des prisonniers devant eux : le premier en voit 99, le deuxième 98, etc.

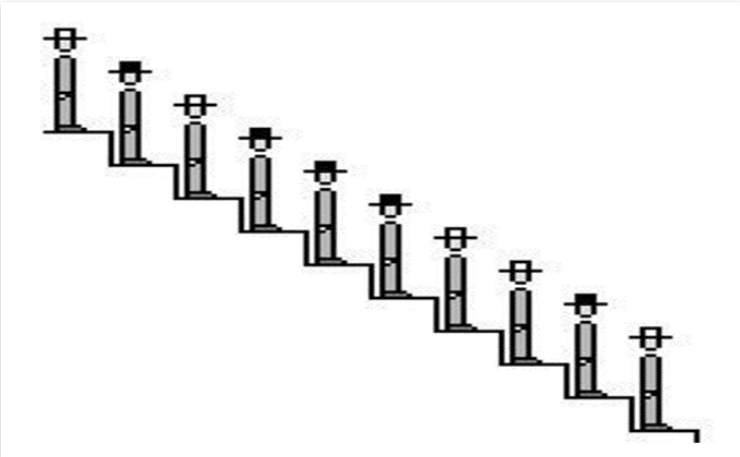


Figure 1 : la situation

Pour vous libérer, vous devez me dire la couleur de votre chapeau en répondant par « blanc » ou « noir » à tour de rôle, en commençant par le prisonnier du haut. Tous les prisonniers entendent les réponses des prisonniers précédents et savent si ceux-ci sont libérés ou non.

Pour libérer un maximum de prisonniers, les prisonniers établissent une stratégie avant l'épreuve. Mais attention : le directeur peut l'entendre et faire en sorte de les piéger !

Texte de l'article

I. Nombre pair de prisonniers, 2 couleurs

1) Nos premières idées

Pour simplifier et bien comprendre la situation, on a d'abord pris plusieurs exemples avec 10 prisonniers. On a d'abord pensé à sauver un prisonnier sur deux. Pour cela, chaque prisonnier de numéro impair donne la couleur du chapeau du prisonnier devant lui (voir image ci-dessous). On sauve ainsi les numéros pairs. Ici, on sauve 8 prisonniers. Cependant, puisque le directeur entend la stratégie des prisonniers, il fera en sorte d'en sauver le moins possible (la moitié), en alternant les couleurs de chapeaux.

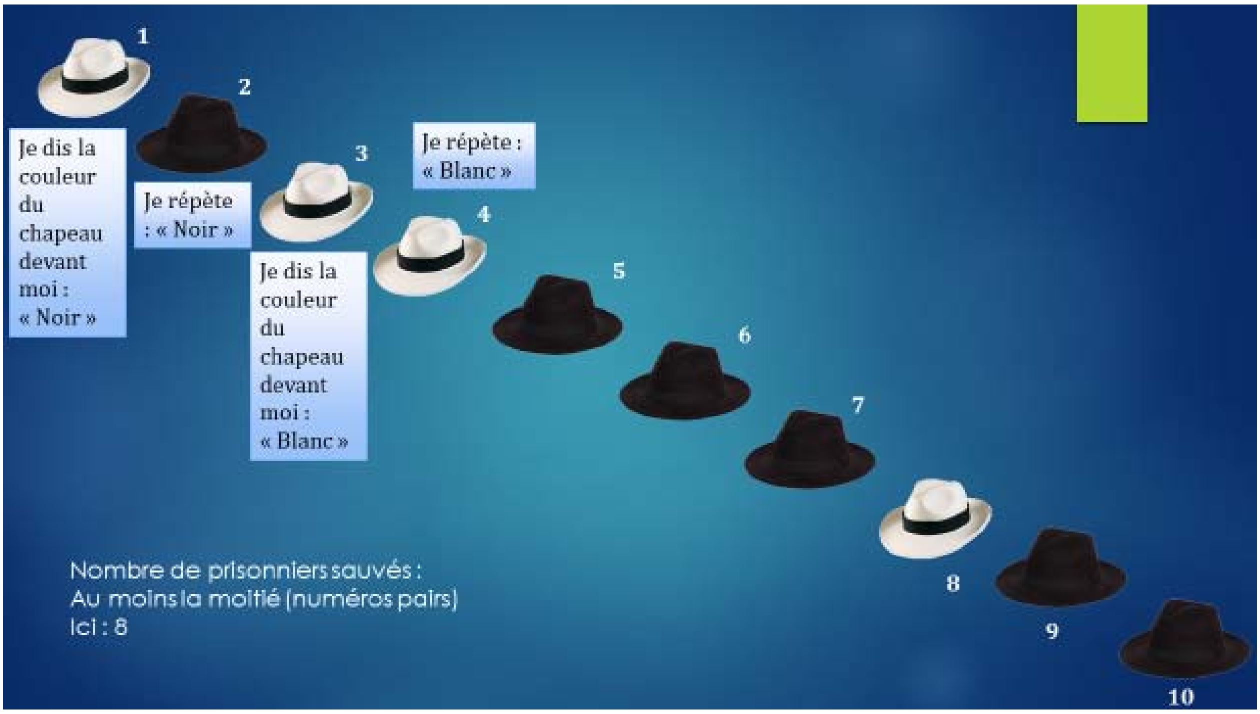


Figure 2 : sauver au moins la moitié

2) Comment sauver 99 prisonniers sur 100 ? (1)

Ensuite, on a trouvé un stratagème permettant de sauver **99 prisonniers** : puisque 99 est impair, il se décompose comme la **somme d'un nombre pair et d'un nombre impair**. Donc il y a forcément une couleur dont le nombre de chapeaux est pair et une dont le nombre de chapeaux est impair. Ainsi le premier prisonnier, qui voit les 99 suivants, **annonce la couleur du nombre pair de chapeaux qu'il voit**, par exemple noir. Le prisonnier suivant **compte le nombre de chapeaux de la couleur annoncée** (ici noir). S'il est pair, le prisonnier en question est blanc. S'il est impair, le prisonnier doit rendre ce nombre pair, il est donc noir. À partir du troisième prisonnier, on doit **ajouter le nombre de chapeaux** noirs **des prisonniers de derrière**.

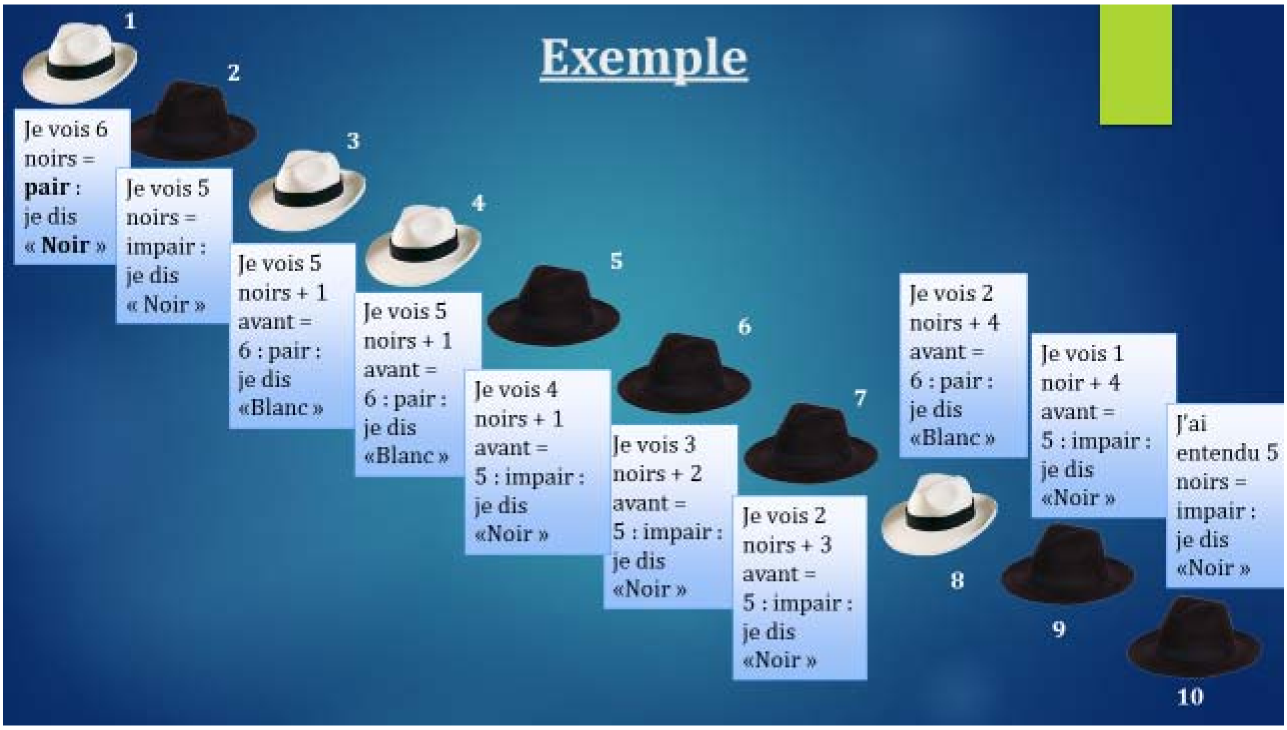


Figure 3 : sauver 99 sur 100

II. Nombre quelconque de prisonniers, 2 couleurs

Nous avons ensuite cherché une méthode permettant de sauver **n-1 prisonniers avec un nombre impair n** de prisonniers. En effet, si n est impair, le premier prisonnier en voit un nombre **pair**. Les nombres de chapeaux blancs et noirs sont donc **tous les deux pairs ou tous les deux impairs**. La méthode **ne fonctionne donc pas**, elle doit être modifiée.

1) Exemple

Voici la stratégie à adopter : les prisonniers **choisissent la couleur à compter**, par exemple le blanc. **Le premier** compte donc le nombre de chapeaux blancs qu'il voit et **annonce sa parité** : par exemple, il dit blanc s'il y a un nombre pair de chapeaux blancs, et noir s'il y a un nombre impair de chapeaux blancs. Ici, le premier prisonnier voit 4 chapeaux blancs, donc il dit blanc. Les prisonniers connaissent la parité du nombre total de chapeaux blancs, ils **peuvent donc en déduire leur couleur** : le deuxième compte seulement le nombre de chapeaux blancs qu'il voit. Ici, il voit un nombre pair de chapeaux blancs, donc il en déduit qu'il est noir. Les autres prisonniers doivent compter le nombre de chapeaux blancs qu'ils voient, mais aussi le nombre de chapeaux blancs qu'ils ont entendu derrière eux. Si cette somme est paire, ils sont noirs, et si elle est impaire, ils sont blancs (pour la rendre paire).

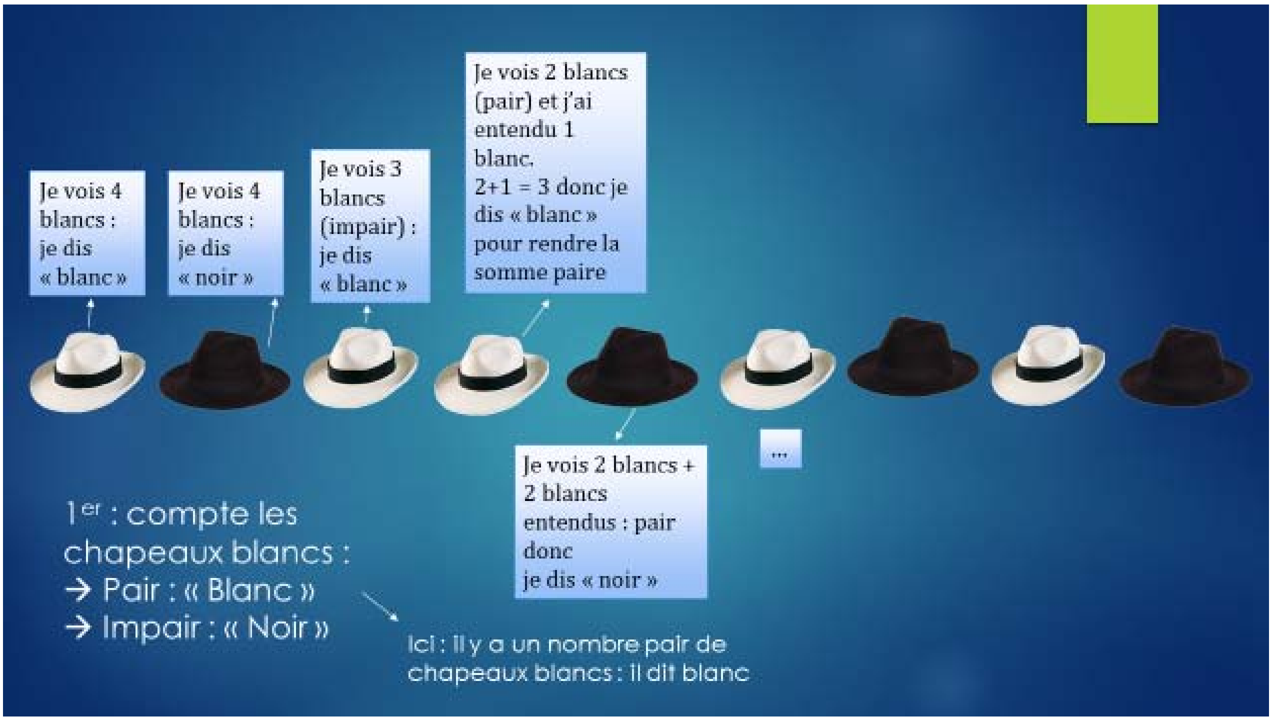


Figure 4 : sauver 8 sur 9

Cette méthode fonctionne pour n'importe quel nombre *n* de prisonniers (pair ou impair). Pour réduire l'écriture et pouvoir la généraliser, nous allons utiliser un outil : les **congruences**.

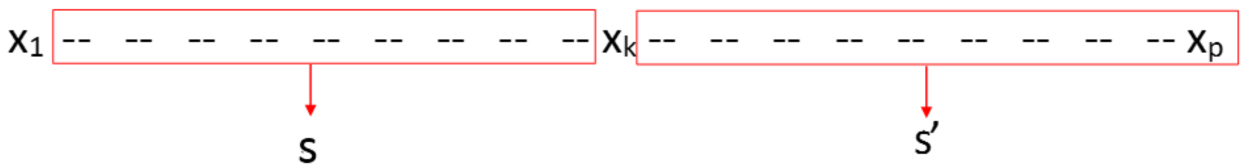
2) Les congruences

Les congruences font référence au reste de la division euclidienne par un entier supérieur à 2.
Dire que deux entiers *a* et *b* sont congrus modulo *n* signifie que *a* et *b* ont le même reste dans la division par *n*. On utilise la notation suivante : $a \equiv b\ [n]$

Dans le cas de la division par 2, le reste peut valoir soit 0, soit 1. Par exemple, 24 est congru à 0 modulo 2 (on note $24 \equiv 0\ [2]$), 25 est congru à 1, 26 à 0, etc. Les nombres pairs sont donc congrus à 0 et les nombres impairs sont congrus à 1 modulo 2.

3) Généralisation de la stratégie avec les congruences

On peut donc reprendre la stratégie précédente et la généraliser à l'aide des congruences. Nous avons représenté la situation par un schéma :



X_k = Position d'un prisonnier aléatoire

s = Somme des chapeaux blancs dans $[X_2 ; X_k[$

s' = Somme des chapeaux blancs dans $]X_k ; X_p]$

Dans cette situation, il y a *p* prisonniers.
Le prisonnier X_k représente un prisonnier quelconque parmi tous les prisonniers. Le prisonnier X_1 est le premier prisonnier et le prisonnier X_p le dernier prisonnier.

En comptant 0 pour un chapeau noir et 1 pour un chapeau blanc, s représente le nombre de chapeaux blancs compris dans l'intervalle $\left[X_2 ; X_k\right[$ (avant le prisonnier X_k) et le nombre de chapeaux blancs compris dans l'intervalle $\left]X_k ; X_p\right]$ est s'.

X_1 compte le nombre total T de chapeaux blancs qu'il voit. On pose par exemple que :

- Si $T \equiv 0$ [2], X_1 dit « blanc »
- Si $T \equiv 1$ [2], X_1 dit « noir »

La somme s + X_k + s' est obligatoirement égale à T, dont les prisonniers connaissent la parité grâce à X_1 donc les autres prisonniers peuvent en déduire leur couleur. Pour chaque prisonnier X_k :

- Si s + s' ≡ T [2], le prisonnier est noir.
- Si s + s' ≢ T [2], le prisonnier est blanc.

Les congruences nous permettent ici de remplacer « est pair », « est impair » et « a la même parité que » respectivement par « est congru à 0 », « est congru à 1 » et « est congru à » modulo 2.

III. Généralisation à *n* couleurs

Pour étendre notre problème à un nombre n fini et connu de couleurs, il faut d'abord attribuer à chaque couleur un entier entre 0 et $n-1$.

Le prisonnier X_1 compte la somme totale T des couleurs des chapeaux qu'il voit.

$T \equiv a\ [n]$, donc X_1 dit la couleur associée à a.

La somme T est égale à : s + X_k + s' ; donc les autres prisonniers peuvent en déduire leur couleur : pour chaque prisonnier X_k sa couleur est congrue à $T - (s + s')]$ modulo n.

Ainsi, on sauve tous les prisonniers sauf le premier, qui se sacrifie pour les autres.

Considère l'exemple ci-dessous avec 20 chapeaux et 7 couleurs.

On attribue alors un nombre de 0 à 6 aux 7 couleurs.

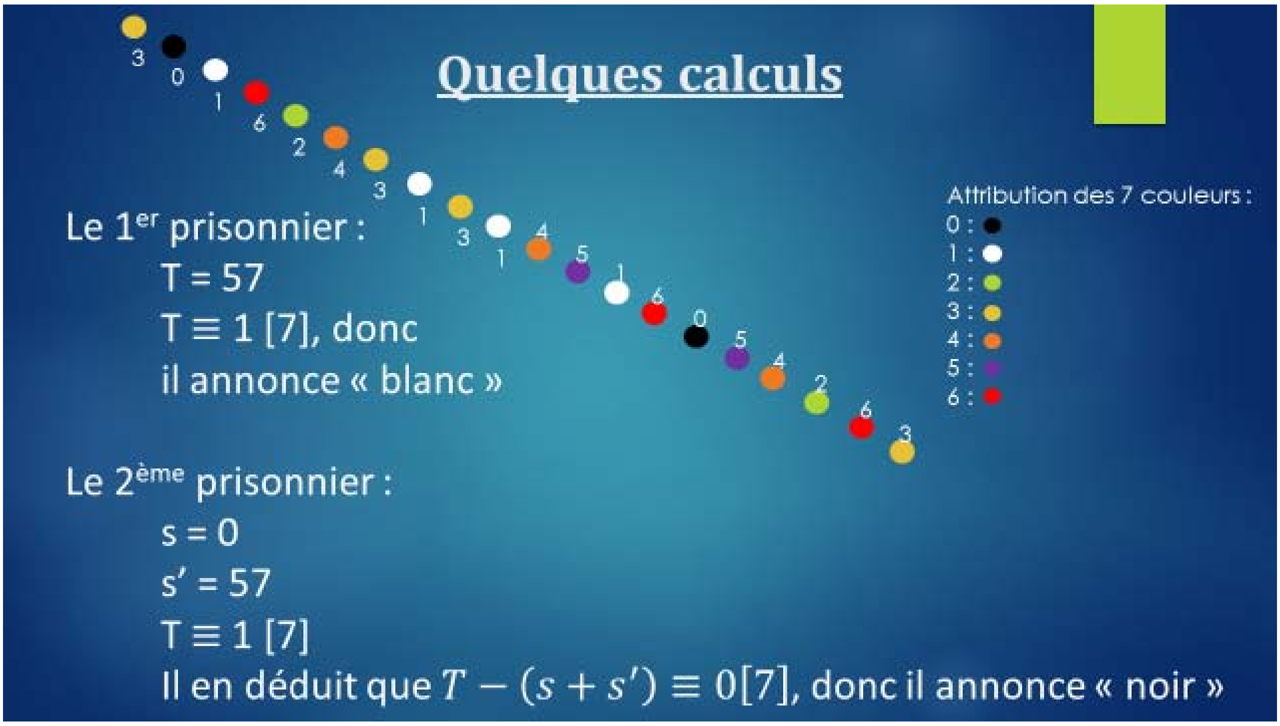


Figure 5 : 20 prisonniers et 7 couleurs

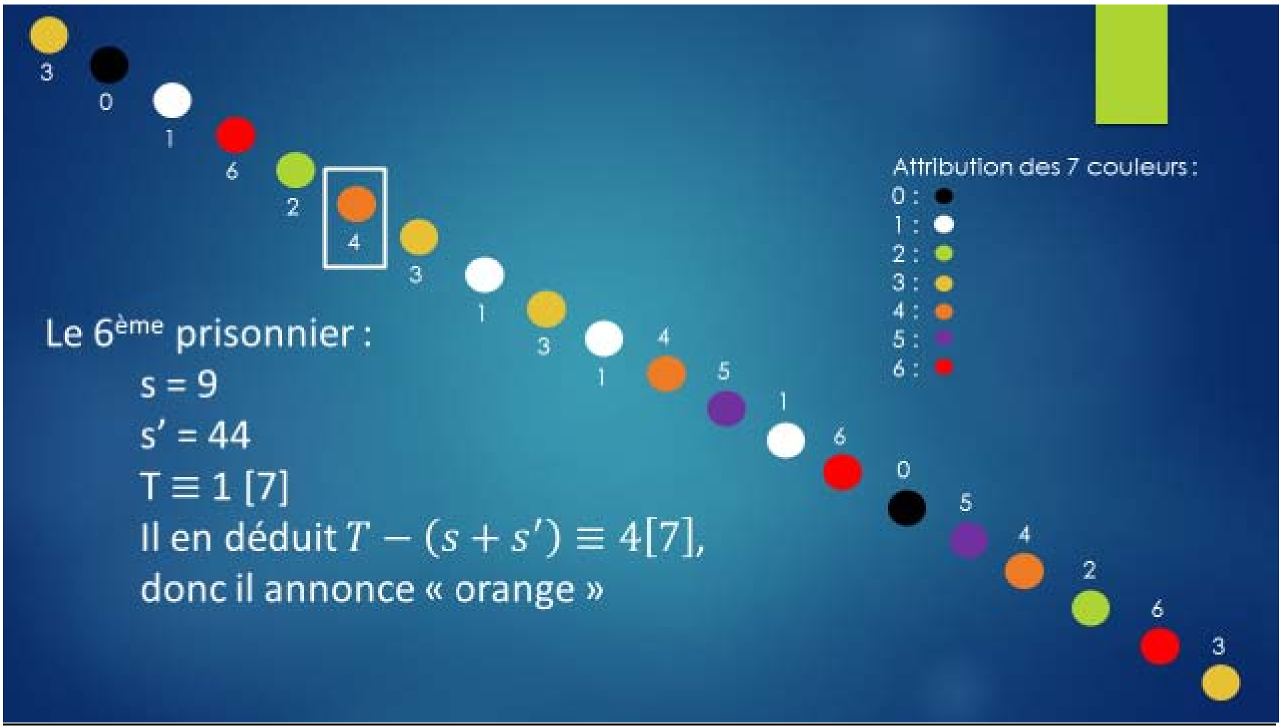


Figure 6 : 20 prisonniers et 7 couleurs

IV. Présentation de la deuxième épreuve

Le chercheur nous a ensuite proposé une seconde épreuve : on place 5 prisonniers dans une salle, et le directeur a maintenant des chapeaux de 5 couleurs différentes. Il place un chapeau sur la tête de chaque prisonnier, sans forcément utiliser les 5 couleurs. Ensuite, chaque prisonnier peut voir la couleur du chapeau des 4 autres mais pas la sienne. Le directeur appelle individuellement et aléatoirement chacun des prisonniers, qui doit dire la couleur de son chapeau. Les autres prisonniers ne peuvent pas entendre la réponse. Il suffit qu'un seul prisonnier trouve sa couleur pour que les 5 soient libérés. Quelle stratégie les prisonniers peuvent-ils mettre en place pour réussir l'épreuve ?

Supposons qu'il y ait au moins autant de prisonniers que de couleurs de chapeaux.
Soit n le nombre de couleurs. On attribue à chaque couleur un nombre de 0 à $n-1$.
Soit S la somme totale des couleurs en présence.

Stratégie
Les prisonniers se répartissent les valeurs possibles de S modulo n. Puis, chacun propose pour sa propre couleur celle qui correspond au nombre qui complète la somme qu'il voit, modulo n.

Exemple avec 5 couleurs et 5 prisonniers

Codes couleurs
Rouge = 0 ; Vert = 1 ; Jaune = 2 ; Bleu = 3 ; Orange = 4

Supposons que le prisonnier A s'est vu attribuer le chapeau vert (1) ; B le chapeau vert (1) ;
C le chapeau rouge (0) ; D le chapeau jaune (2) et E le chapeau bleu (3).

Stratégie : A s'attribue le nombre 0 ; B le 1 ; C le 2 ; D le 3 ; E le 4.

Le prisonnier A voit 4 chapeaux, soit la somme $1+0+3+4=8$.
Il propose alors 2, car $8+2\equiv 0[5]$, donc la couleur Jaune.
De même, B propose 3, donc Bleu ; C propose 0, donc Rouge, ce qui est la bonne couleur…

Démonstration avec 5 couleurs et 5 prisonniers
Le prisonnier A reçoit la couleur numérotée a ; B reçoit b … et E reçoit e
Les nombres a, b, c, d, e sont tous choisis dans $\{0;1;2;3;4\}$
Notons $S=a+b+c+d+e$ la somme des couleurs en présence.
Modulo 5, il est certain que S est congru à 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4.

Conformément à la stratégie adoptée, le prisonnier A s'attribue $S\equiv 0[5]$
Il voit $b+c+d+e$ et il propose donc la couleur de $-b-c-d-e$ modulo 5

Le prisonnier B s'attribue $S\equiv 1[5]$
Il voit $a+c+d+e$ et il propose donc $1-a-c-d-e$ modulo 5

De même, C a choisi $S\equiv 2[5]$ et il propose $2-a-b-d-e$ modulo 5
D a choisi $S\equiv 3[5]$ et il propose $3-a-b-c-e$ modulo 5
E a choisi $S\equiv 4[5]$ et il propose $4-a-b-c-e$ modulo 5

Comme dit au début, modulo 5, il est certain que S est congru à 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4.

Supposons que $S \equiv 0[5]$. Alors c'est la proposition de A qui sera correcte.

En effet, $S \equiv 0[5] \Leftrightarrow a+b+c+d+e \equiv 0[5] \Leftrightarrow a \equiv -b-c-d-e[5]$ et a est donc bien la proposition de A.

Si $S \equiv 1[5]$, c'est la proposition de B qui sera correcte…

Par disjonction des cas, il est certain qu'exactement un des 5 prisonniers donnera la couleur de son chapeau.

Remarque

Cette stratégie ne fonctionne que si le nombre de couleurs n'excède pas celui des prisonniers. (2)

Conclusion

Première épreuve : quels que soient les nombres connus n de prisonniers et de couleurs de chapeaux, on sauve $n-1$ prisonniers. Seul le premier à parler restera en prison si le directeur a compris la stratégie et qu'il fait en sorte de ne pas le sauver.

Deuxième épreuve : si le nombre de prisonniers est supérieur ou égal au nombre de couleurs de chapeaux, les prisonniers seront sauvés.

Notes d'édition

(1) Le lecteur, la lectrice pourra vite se rendre compte qu'il n'est pas possible de sauver à coup sûr les prisonniers.

(2) Ceci amène une question légitime. S'il y a plus de couleurs que de chapeaux, est-il encore possible de gagner ? Les arguments présentés précédemment permettent de répondre à la question.