

# Les pavages de terrasses

Fabien MONS-QUENDO, Benjamin GUERMONPRES

élève de 4ème , collège Fantin Latour

Enseignants : Benoît LE BRUN et Nicolas CELLIER

Chercheur(s) : Catriona MCLEAN et Eric DUMAS  
(Université Joseph Fourier, Grenoble)

Pour simplifier la compréhension et la formulation des règles, nous avons créé un damier sur les terrasses [en colorant les cases]. La première case est blanche. Si le nombre total de cases de la grille est pair, il y aura autant de cases blanches que de cases grises, si le nombre total de cases est impair, il y aura une case blanche de plus.

La figure 1a montre un exemple de pavage réussi alors que la figure 1b montre un pavage qui n'est pas possible.

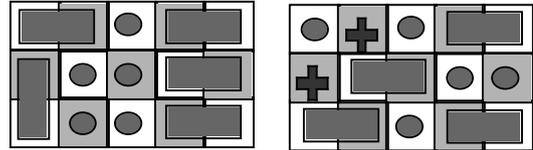


Figure 1a et 1b

## Règles générales pour que le pavage soit possible [conditions nécessaires]

- Sur une terrasse avec un *nombre pair de cases* nous avons constaté qu'il fallait un *nombre pair d'arbres*. Et il faut un *nombre impair d'arbres pour une terrasse impaire*.
- Sur une terrasse avec un *nombre pair de cases*, il faut placer les arbres de telle façon à ce qu'il y en ait le *même nombre entre cases grises et cases blanches*.
- Sur une terrasse avec un *nombre impair de cases* (donc un nombre impair de lignes et de colonnes), il faut placer les arbres de telle façon à ce qu'il y en ait *un arbre en plus sur une case blanche*. Exemple: 1 arbre sur une case grise et donc 2 arbres sur des cases blanches.

## Terrasses simples

Nous avons d'abord cherché avec des cas simples en commençant par la plus petite terrasse possible : la terrasse  $2 \times 2$  avec 2 arbres. *Les deux cases contenant les arbres doivent avoir un côté en commun.*

Puis nous sommes passés au cas de la terrasse  $2 \times 3$ . Avec 2 arbres on a vu que les deux arbres doivent être *soit aux extrémités opposées soit que les deux cases avec des arbres aient un côté en commun*. Avec 4 arbres, les arbres doivent être «en L», *en carré ou aux quatre extrémités*.

Sur une terrasse  $3 \times 3$  avec 1 arbre, il faut placer l'arbre sur une case blanche et elle *pourra être remplie*. Sur la même terrasse avec 3 arbres, il faut placer 2 arbres sur des cases blanches et le dernier sur une case grise et le pavage sera également toujours possible. [Les cas de 5 ou 7 arbres ne sont pas traités]

Sur une terrasse  $5 \times 3$  avec 1 arbre ou 3 arbres, il faut respecter les règles et le pavage est toujours possible!

Sur la même terrasse avec 5 arbres, **en respectant la règle**, on peut remplir la terrasse mais **on peut également la bloquer**. On voit sur la figure 2 que la position des arbres respecte les règles générales ; mais sur la

## Sujet

On cherche à paver une terrasse rectangulaire avec des pavés de  $2 \times 1$  cases et des arbres de  $1 \times 1$  case. La position des arbres est fixée au départ et on cherche à compléter par des pavés de  $2 \times 1$  cases.

Quelles sont les configurations pour lesquelles le pavage est possible ? Celles pour lesquelles il est impossible?

## Mots clés

PAVAGE, DOMINO, RECTANGLES, PARITÉ, DAMIER, CONDITION NECESSAIRE

première ligne il est obligatoire de mettre un pavé horizontal et il restera une seule case sur laquelle on ne peut pas mettre un pavé vertical. Donc le pavage est impossible.

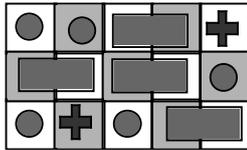


Figure 2

Le pavage est impossible bien que les arbres soit placés au bon endroit (un de plus sur une case blanche);

**Généralisation avec un seul arbre:**

Dans une terrasse avec un nombre impair de cases, peu importe sa taille, avec un arbre placé sur une case blanche dans une ligne impaire, il restera un nombre pair de lignes au dessus et en dessous de cet arbre et donc il suffit de paver la ligne contenant l’arbre puis il restera un nombre pair de lignes.(figure 3a).

Si on met ce même arbre dans une ligne paire, il faudra toujours sur une case blanche placer les 4 pavés de manière à entourer l’arbre et ainsi on aura également un nombre pair de lignes et de colonnes autour de cet ensemble (figure 3b).

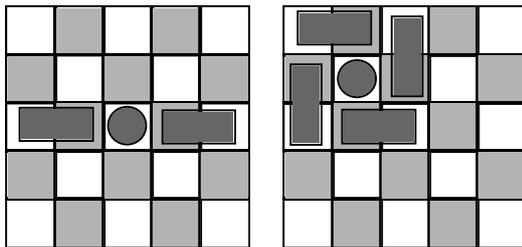


Figure 3a et 3b

**Conclusion [conjectures]**

A partir des essais que nous avons réalisés, il semble que pour les terrasses contenant un nombre pair de cases, avec 2 arbres, en respectant les règles générales mentionnées au début, le pavage soit toujours possible.

Avec 4 arbres, nous n’avons pas été assez loin mais il semble que ce soit également le cas.

De même, avec 1 ou 3 arbres sur une terrasse comportant un nombre impair de cases, le pavage semble toujours possible. Nous l’avons démontré pour 1 arbre.

Par contre, avec 5 arbres ou plus, même en respectant les règles générales, il est possible de bloquer le pavage.

\*\*\*