Les nombres infinis à droite

BOUARAVONG Marina, EA Mev-Eng, LY Delphine, TSAN Elodie, UY Nathalie.

élève de 4ème, Collège Camille Claudel, Paris 13ème
Enseignants : M. ALEXINITZER et M. ALAMI
Chercheur : Melle DAADAA

Sujet

Construction de nombres par décalage.

Prenons le nombre 14. Multiplions-le par 2 et décalons le résultat d'une ligne et de 2 rangs vers la droite. Si nous continuons le processus, nous obtenons :

0,**14**0000000000000000000000000000
0,00**28**00000000000000000000000000
0,0000**56**000000000000000000000000
0,00000**112**0000000000000000000000
0,0000000**224**00000000000000000000
0,000000000**448**000000000000000000
0,00000000000**896**0000000000000000
0,000000000000**1792**00000000000000
0,00000000000000**3584**000000000000
0,0000000000000000**7168**0000000000
0,00000000000000000**14336**00000000
0,0000000000000000000**28672**000000
0,000000000000000000000**57344**0000
0,0000000000000000000000**114688**00
0,000000000000000000000000**229376**
0,00000000000000000000000000**4588**
0,0000000000000000000000000000**92**
\+ 0,00000000000000000000000000000**2**

0,**142857**142857**143857**142857**142857…**

Si nous additionnons, nous obtenons une suite de chiffres qui est surprenante : elle est périodique.

Nous pouvons, de plus, reconnaître le début du développement décimal de 1/7

Une question se pose alors :

Obtient-on toujours une suite périodique ?

Mots-clés

FRACTION, DÉCALAGE, DÉCIMALE, ÉCRITURE DÉCIMALE, PÉRIODIQUE, RATIONNEL, SÉRIE GÉOMÉTRIQUE, SOMME INFINIE

Pour répondre à cette question nous avons fait une série de calcul à la main avec différentes multiplications et différents décalages.

Dans la plupart de nos calculs nous avons obtenu des suites périodiques. Ensuite, nous avons utilisé Excel pour mettre en évidence nos calculs.

Par exemple : **7×9 avec un décalage de 2.**

0,**7**00000000000000000000000000000
0,0**63**000000000000000000000000000
0,00**567**0000000000000000000000000
0,000**5103**00000000000000000000000
0,0000**45927**000000000000000000000
0,00000**413343**0000000000000000000
0,000000**3720087**00000000000000000
0,0000000**33480783**000000000000000
0,00000000**301327047**0000000000000
0,000000000**2711943423**00000000000
0,0000000000**24407490807**000000000
0,00000000000**219667417263**0000000
0,000000000000**1977006755367**00000
0,0000000000000**17793060798303**000
0,00000000000000**160137547184727**0
0,000000000000000**144123792466254**
0,0000000000000000**12971141321963**
0,00000000000000000**1167402718977**
0,000000000000000000**105066244708**
0,00000000000000000000**9455962024**
\+ 0,000000000000000000000**851036582**

0,769230**769230**769230**769230**769230**…**

3×12 avec un décalage de 2.

0,**3**00000000000000000000000000000
0,0**36**000000000000000000000000000
0,00**432**0000000000000000000000000
0,000**5184**00000000000000000000000
0,0000**62208**000000000000000000000
0,00000**746496**0000000000000000000
0,000000**8957952**00000000000000000
0,000000**107495424**000000000000000
0,0000000**1289945088**0000000000000
0,00000000**15479341056**00000000000
0,000000000**185752092672**000000000
0,0000000000**2229025112064**0000000
0,00000000000**26748301344768**00000
0,000000000000**320979616137216**000
0,0000000000000**385175539364659**00
0,00000000000000**462210647237591**0
0,000000000000000**554652776685109**
0,0000000000000000**66558333202213**
0,00000000000000000**7986999984266**
\+ 0,000000000000000000**958439998112**

0,34**09**09**09**09**09**09**09**09**09**09**09**09**09**09**…**

[Attention, les derniers chiffres des additions montrées ici résultent de l'addition de chiffres non visibles mais présents dans les écritures du tableur Excel]

3×19 avec un décalage de 2.

0,**3**00000000000000000000000000000

0,0**57**000000000000000000000000000

0,0**1083**0000000000000000000000000

0,00**20577**00000000000000000000000

0,000**390963**000000000000000000000

0,0000**7428297**0000000000000000000

0,0000**141137643**00000000000000000

0,00000**2681615217**000000000000000

0,000000**50950689123**0000000000000

0,0000000**968063093337**00000000000

0,0000000**18393198773403**000000000

0,00000000**349470776694657**0000000

0,000000000**6639944757198480**00000

0,000000000126158950386771000000

0,000000000023970200573486500000

0,000000000004554338108962440000

0,000000000000865324240702864000

0,000000000000164411605733544000

0,000000000000031238205089373400

0,000000000000005935258966980940

0,000000000000001127699203726380

0,000000000000000214262848708012

0,000000000000000040709941254522

\+ 0,000000000000000007734888838359

0,370370370370370370370370370370…

Faisons la conjecture suivante :

Nous obtenons toujours une suite périodique [à partir d'un certain rang].

Nous savons que 0,14 multiplié par 2 avec un décalage de 2 rangs vers la droite revient à multiplier 0,14 par 0,02. Nous avons donc travaillé sur la partie décimale, c'est-à-dire les chiffres après la virgule. Le terme correspondant à notre premier exemple est :

$0{,}14 \times 0.02$

Celui d'après :

$0{,}14 \times 0{,}02 \times 0{,}02 = 0{,}14 \times 0{,}02^2$

Le suivant est

$0{,}14 \times 0{,}02^3$.

C'est ce qu'on appelle une *suite géométrique*.

En additionnant tout ces termes, nous obtenons ceci :

$0{,}14 + 0{,}14 \times 0{,}02 + 0{,}14 \times 0{,}02^2 \ldots$

[On somme ici un nombre fini de termes]

En factorisant, on obtient :

$0{,}14 \times (1 + 0{,}02 + 0{,}02^2 + \ldots)$

Nous savons, à l'aide de la théorie de la suite géométrique que, si nous ajoutons tous les termes entre parenthèses, on obtient : :

$1 + 0{,}02 + 0{,}02^2 + \ldots = 1/(1-0{,}02)$

[On somme ici un nombre infini de termes : le résultat où l'égalité indique en fait une *limite,* n'est valide que si la raison de la suite (0,02 dans l'exemple traité) est inférieure à 1]

Dans notre cas, cela donne :

$0{,}14 \times (1/1-0{,}02) = 0{,}14/0{,}98$

$=$ **1/7** $= 0{,}142857142857\ldots$

Nous constatons que la somme des termes est une *écriture fractionnaire*, ou une fraction.

Nous savons, par ailleurs, que la partie décimale du quotient de la division de deux nombres décimaux est, à partir d'un certain rang, périodique.

Le calcul proposé mène donc toujours à une suite périodique.

Nous avons démontré la conjecture.

[Note. Le résultat, qui est montré ici dans le cas de 0,14 × 2 avec décalage de 2 se généralise facilement à tous les cas où le facteur multiplicatif (décalage compris) est inférieur à 1.

Il faudrait toutefois s'assurer que ce sont bien les mêmes chiffres qui apparaissent dans les sommes finies des termes de la suite géométrique et dans l'écriture décimale illimitée de la fraction obtenue comme limite de la somme infinie .]

***