Le problème des interrupteurs

par

Laure de la ROQUE, Aurélie NICOLAS, Claire PELTIER (1ère L), Benoît RANGEL et Cyrille SCIFO (2de)

(Lycée Polyvalent Fernand Daguin, 33-Mérignac)

et

(Lycée Elie Faure, 33 - Lormont)

Jumelage Math.en..Jeans 1999-2000.

Enseignants : *Annick BAILLOU (Lycée Elie Faure) Jean-Pierre GUIBBAUD et François THOMAS (Lycée Fernand Daguin).*

Chercheur : *Emeric GIOAN (LABRI, CNRS et Université de Bordeaux I).*

Sujet initial

Les interrupteurs (Shannon's switching game, ~ 1940)

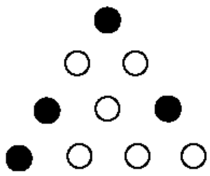

Figure 1

Des boutons lumineux sont disposés en réseau (figure 1). Un clic sur un bouton change l'état, allumé ou éteint, du point et celui de ses voisins. Par une succession de clics, la plus courte possible, on cherche à éteindre tous les boutons à partir d'une configuration donnée.

On étudiera divers types de réseaux, en cherchant des solutions les plus générales possibles… [1]

On a :

- des *lampes-interrupteurs* représentées par des points allumés : ○.
- des *lampes-interrupteurs* représentées par des points éteints : ●.
- certaines étant reliées entre eux :

Lorsqu'on change l'allumage d'un point on change l'allumage de ceux qui lui sont directement liés.

Définitions

Réseau : manière dont sont disposés les points et les liaisons. [2]

Etat : Un point peut être soit allumé, soit éteint.

Configuration : elle regroupe le réseau et les états des points au départ.

Séquence : suite de touches sur lesquelles on appuie pour modifier un état.

But

Le but est de tout éteindre, quelle que soit la configuration choisie au départ.

Exemple

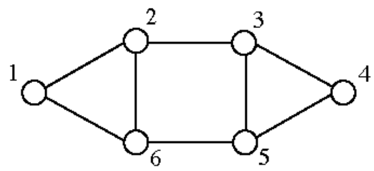

Figure 2

Si on appuie sur la lampe-interrupteur 1, on change l'allumage des lampes interrupteurs 1, 2 et 6.

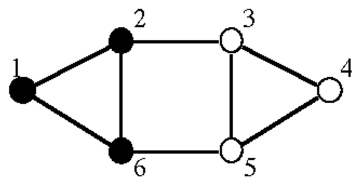

Figure 3

Si on appuie sur la lampe-interrupteur 4 on change l'allumage des lampes-interrupteurs 3, 4 et 5.

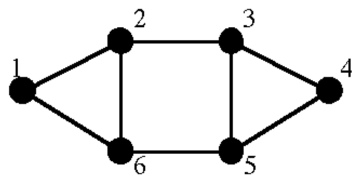

Figure 4

La séquence 1- 4 est solution.

la commutativité

Soient deux lampes interrupteurs : L_A et L_B

On appelle I_A [l'ensemble des] lampes-interrupteurs dont l'état dépend de la lampe-interrupteur A.

On appelle I_B [l'ensemble des] lampes-interrupteurs dont l'état dépend de la lampe-interrupteur B.

On appelle $I_A \cap I_B$ [l'ensemble des] lampes-interrupteurs dont l'état dépend des deux lampes-interrupteurs.

On cherche à montrer que l'ordre dans lequel on appuie sur les lampes-interrupteurs n'a pas d'importance.

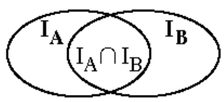

Figure 5

Si on appuie sur la lampe-interrupteur A :

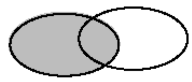

Figure 6

Si on appuie [maintenant] sur la lampe-interrupteur B:

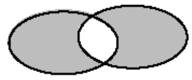

Figure 7

Ensuite, on recommence en changeant l'ordre. On appuie d'abord sur la lampe-interrupteur B:

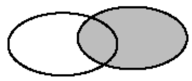

Figure 8

Puis sur la lampe-interrupteur A :

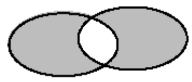

Figure 9

On remarque que l'on obtient le même résultat quel que soit l'ordre choisi. On peut donc affirmer :

[Théorème 1]

L'ordre dans lequel on appuie sur les lampes-interrupteurs n'a pas d'importance.

De plus on peut dire que si l'on appuie sur L_A puis L_B et enfin L_A , cela revient au même d'appuyer sur L_A puis L_A puis L_B , donc d'appuyer sur L_B . On peut donc en déduire :

[Théorème 2]

Il n'y a pas besoin d'appuyer deux fois sur la même lampe-interrupteur.

Ainsi, pour le premier exemple (figures 2,3,4), la séquence 3- 1- 3 - 4 est inutile [3].

Séquences utiles

On appellera donc *séquence utile* une séquence dans laquelle aucun nombre n'est répété.

quelques configurations

Si l'on prend une configuration avec un nombre quelconque (par exemple 5) de points disposés en cercle …

… il suffit d' appuyer successivement sur les 5 points pour tout éteindre.

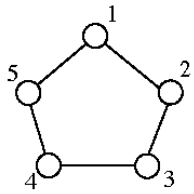

Figure 10

Si l'on prend une configuration [entièrement allumée] avec un nombre de points multiple de trois disposés en cercle…

…Il suffit d'appuyer sur un point sur trois pour tout éteindre.

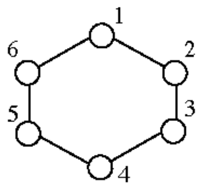

Figure 11

Si l'on prend une configuration avec un nombre de points pair (par exemple 8 points) disposés en cercle en éteignant un point sur deux …

… il suffit d'appuyer successivement sur les points qui étaient allumés au départ pour tout éteindre.

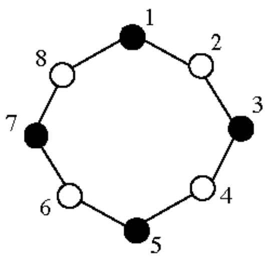

Figure 12

le nombre de séquences utiles

[4] On a cherché une formule permettant de trouver le nombre de séquences utiles à partir du nombre de points.

Tout d'abord nous avons établi un tableau :

Nombre d'interrupteurs	Nombre de séquences utiles
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

Figure 13

[Conjecture]

A partir de ces résultats, nous avons trouvé la formule suivante :

$$U_n = 2^n$$

avec :

• n : nombre d'interrupteurs

• U_n : nombre de séquences utiles.

Exemple : soit $n = 9$: $U_9 = 2^9 = 512$. Pour 9 interrupteurs, on a 512 séquences utiles.

On peut ainsi remarquer que la taille du problème dépend du nombre de points.

une autre manière d'exprimer les configurations

Prenons une configuration à 6 points qui peut se résoudre en appuyant sur les lampes-interrupteurs 1 et 4 (figure 11)

On peut exprimer cette configuration sous forme de tableau. Pour cela déterminons quel point est relié avec quel point :

- 1 est relié avec 1-2-6
- 2 " 1-2-3
- 3 " 2-3-4
- 4 " 3-4-5
- 5 " 4-5-6
- 6 " 1-5-6

On peut ainsi ~~établir~~ [former] le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	*	*				*
2	*	*	*			
3		*	*	*		
4			*	*	*	
5				*	*	*
6	*				*	*

Ce tableau permet de visualiser autrement la configuration ; mais pour pouvoir la résoudre il faut en faire un autre :

	1	2	3	4	5	6
Au départ	1	1	1	1	1	1
On appuie sur 1	0	0	1	1	1	0
On appuie sur 4	0	0	0	0	0	0

On réussit donc bien à éteindre cette configuration même en la formulant sous forme de tableau. [5]

idées pour des recherches futures

- Trouver une ~~solution pour~~ [manière d']essayer toutes les combinaisons possibles sans se répéter.
- Lorsqu'on a une configuration dessinée, essayer de la dessiner autrement.
- Modélisation informatique.
- Recherche sur des configurations compliquées (ex. 30 lampes-interrupteurs).
- Recherche d'invariants : cercles, chaînes [6]

Notes des éditeurs

1 — Pour des utilisations pédagogiques de ce jeu dans l'enseignement secondaire, on peut consulter O. Björkqvist, Application of Mathematics to a Category of Advanced Strategy Games, in Jan de Lange, Christine Keitel, Ian Huntley and Morgen Niss (eds.), *Innovation in Maths Education by Modeling and Applications*, Ellis Howood, New York (…), 1993, *269-276.* Pour une analyse mathématique d'un cas particulier voir Pelletier D., Merlin's magic Square, *Amer. Math. Month.* 94, 143-150.

2 — Ici, un réseau est un *graphe*.

3 — Les séquences "inutiles" sont celles que l'on peut *simplifier* en effaçant deux occurencesd'un même point.

4 — Les auteurs titraient ici «ensemble de solutions» en désignant ainsi l'ensemble dans lequel ils cherchaient des solutions.

5 — Une piste possible pour une approche très générale du problème, consistant à combiner des lignes de 0 et de 1 …

6 — L'idée est, semble-t-il, d'enrichir le jeu des commutations de base (clics sur un seul interrupteur) en se servant de solutions déjà trouvées pour des morceaux de configuration.