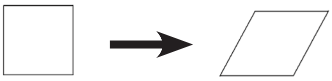
Les échafaudages

Par DUMAY Robin, DONA Roman, MAURIN Baptiste et JAVENEAU Clément (2nde 5)

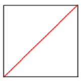
Lycée d'Altitude de Briançon.
Enseignant : PROAL Hubert
Chercheur : PETIT Camille (Institut Fourier de Grenoble)

Sujet

On s'intéresse à un échafaudage (ou un grillage) de taille m x n dans le plan. Il est constitué de losanges de barres articulées pouvant se déformer :

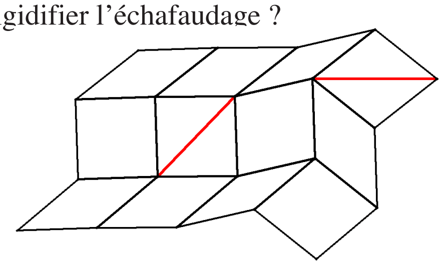


On peut rigidifier un carré en lui ajoutant une barre diagonale :



On se pose deux questions :

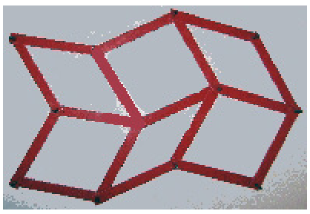
1) combien de barres diagonales faut-il au minimum pour rigidifier l'échafaudage ?



2) un échafaudage donné est-il rigide ?

Pour nous aider dans nos recherches, notre établissement nous a fabriqué des structures « échafaudages ».

Échafaudage 2×3

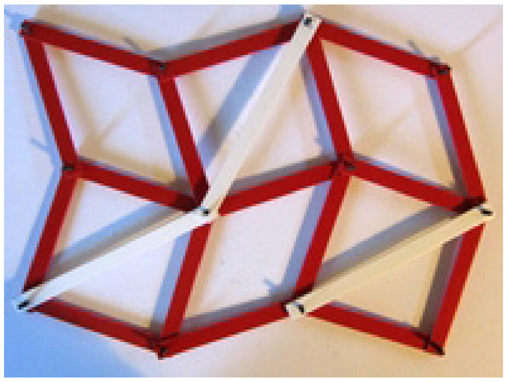


Mots-clés

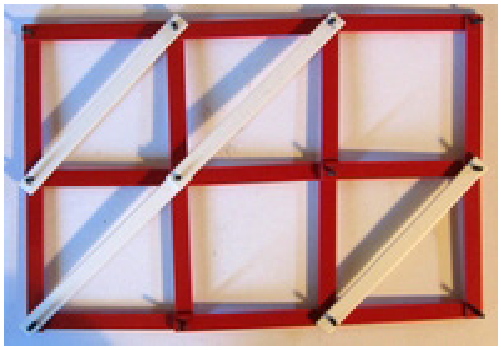
Rigidité, échafaudage, treillis, plan, barres articulées

Définition. Nous disons qu'un échafaudage est rigide s'il est impossible de le déformer.

Par exemple :



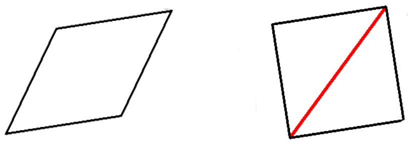
Échafaudage non rigide



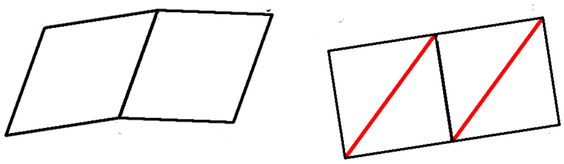
Échafaudage rigide

Les échafaudages du type 1 × n

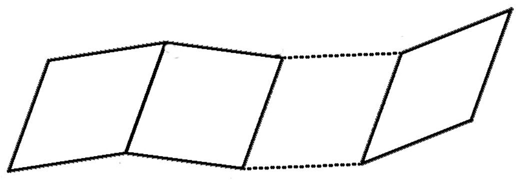
1 × 1 : Pour le rigidifier il faut une barre



1 × 2 : Pour le rigidifier il faut deux barres



1 × n

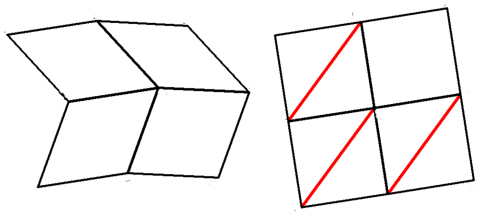


Propriété 1. Pour rigidifier un échafaudage de taille 1×*n* il nous faudra *n* barres, car s'il y a une case sans barre diagonale dans cet échafaudage, on pourra le déformer.

Les échafaudages du type 2 × *n*

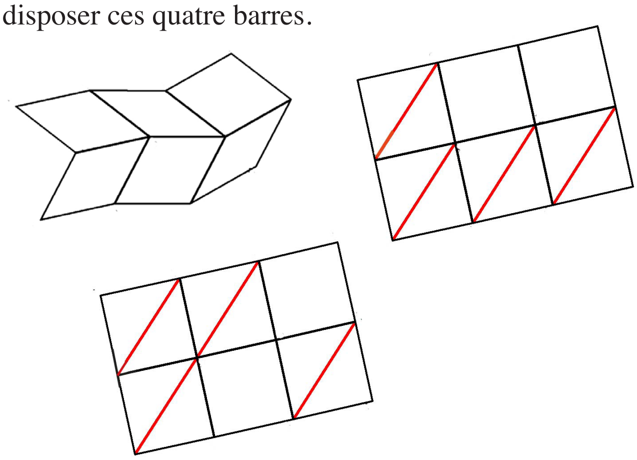
• 2 × 2

Pour le rigidifier il faudra trois barres. Avec deux barres, l'édifice peut être déformé.



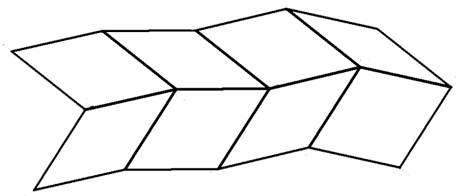
• 2 × 3

Pour le rigidifier il faut quatre barres. Nous avons remarqué que nous avons plusieurs manières de disposer ces quatre barres.



• 2 × 4

Nous avons fait des essais sur nos maquettes, il faut au minimum cinq barres. Là aussi il y a plusieurs solutions.



• Pour 2 × 5 il nous faudra 6 barres et pour 2 × n nous avons conjecturé qu'il nous faudra n+1 barres pour le rigidifier.

Les échafaudages du type 3 × n

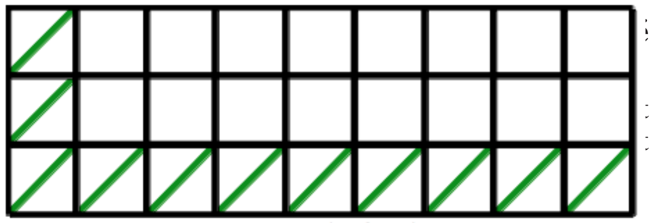
• 3 × 3. Il nous faut cinq barres

• 3 × 4. Il nous en faut six

• 3 × 5. Il en faut sept.

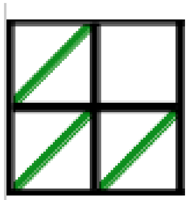
• 3 × *n*. Nous avons conjecturé qu'*il faudra n+2 barres pour le rigidifier.*

Conjecture générale. Nous avons généralisé nos conjectures : à savoir *pour rigidifier un échafaudage de 4×n il faudra n+3 barres, 5×n il en faudra n+4 et pour m×n il faudra n+m-1 barres de renfort*.



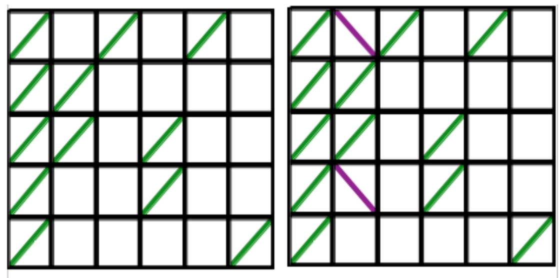
Corollaire. Pour un échafaudage $n \times m$, $n+m-1$ barres suffisent pour le rigidifier.

Méthode pour la preuve du théorème :

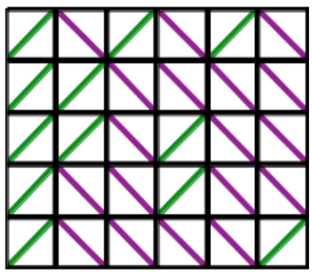


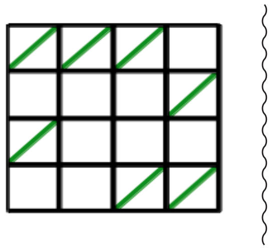
Si à l'intérieur d'une structure donnée, il y a une sous-structure 2 × 2 avec trois barres comme ci-contre, alors la quatrième case est rigide. On met alors une barre « virtuelle » dans cette case. On cherche ensuite d'autres sous-structures 2 × 2 avec trois barres (« réelles » ou « virtuelles »). *Si on peut de cette manière remplir toutes les cases, alors la structure est rigide*.

Avec cette règle, nous pouvons déterminer si certains échafaudages sont rigides. Par exemple :



La figure de gauche ci-dessus devient la figure de droite et ainsi de suite nous arrivons à :





Cette méthode permet de donner la preuve de notre théorème. Par contre il existe des échafaudages rigides dont nous ne pouvons pas prouver la rigidité avec notre méthode (exemple ci-contre)

Cette méthode ne nous a pas permis de prouver la totalité de la conjecture générale. En effet, nous pouvons seulement dire qu'il faudra au minimum une barre par colonne et par ligne (soit max(m;n) barres). Nous n'avons pas pu prouver qu'il n'existe pas d'échafaudage rigide avec seulement $n+m-2$ barres.

***