

Les carrés magiques

Honorine COUNIL, Mélanie MAGNOUX,
Ingrid MARTIN

élèves de 5^{ème}, Collège Fernand Garandau à La Tremblade (17)

Enseignants : Nathalie Robert, Dominique Direxel
Chercheur : Gilles Bailly-Maître

1) Comment construire un carré magique de 9 cases ?

Nous avons déjà cherché à remplir un carré magique contenant les nombres de 1 à 9, dont la somme [dans chaque ligne, colonne ou diagonale] était 15. [On verra au §3 que la somme magique est nécessairement 15]

Quel nombre doit-on mettre dans la case du milieu ?

Le 9 ne peut jamais être au centre car s'il est aligné avec le 8, la somme est 17 [supérieure à 15]; il ne peut non plus être aligné avec le 7 et le 6 car le résultat serait au-dessus de 15.

Le 7 ne peut jamais être au centre car s'il est à coté du 9 la somme est au-dessus de 15. [Ce serait la même chose pour le 6 ou le 8, d'après ce qui précède]

Le 3, placé au centre ne fonctionne pas car $9+3=12$ et $12+3=15$; chaque nombre ne doit être mis qu'une seule fois dans le carré.

Le 2 et le 1 ne peuvent pas convenir car ils seront forcément alignés avec des nombres inférieurs à 6 et donc la somme [avec un troisième nombre] ne peut faire 15.

Le 5 peut convenir quand il est sur la case du milieu. [En fait seul 5 peut convenir : dans la suite, ce résultat est admis]

Exemple :

6	7	2
1	5	9
8	3	4

En faisant tourner les nombres d'un quart de tour, on retrouve la même somme.

2) Peut-on trouver un carré magique avec les nombres de 11 à 19 ?

On part du carré précédent et on ajoute 10 à chaque nombre. La somme est $45 = 15 + 3 \times 10$

16	17	12
11	15	19
18	13	14

Quand on a trouvé un carré magique, on peut en définir d'autres en ajoutant un même nombre dans chaque case du carré. [...]

[Par ce procédé] on a trouvé d'autres carrés magiques :

46	47	42	76	77	72	96	97	92
41	45	49	71	75	79	91	95	99
48	43	44	78	73	74	98	93	94

Sujet

Comment construire un carré magique ?

Définition : Un carré magique est [une grille carrée dont chacune des cases contient un nombre et qui est telle que] toutes les lignes horizontales, verticales et diagonales ont la même somme.

Mots-clés

CARRÉ MAGIQUE, SOMME, NOMBRES, CONSÉCUTIFS

Quand on a trouvé un carré magique, on peut en définir d'autres en multipliant chaque case par un même nombre.

$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$2 \times 7 = 14$
$1 \times 7 = 7$	$5 \times 7 = 35$	$9 \times 7 = 63$
$8 \times 7 = 56$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$

La somme est $15 \times 7 = 105$ et [vaut 3 fois le nombre central] : $35 \times 3 = 105$.

3) Pourquoi la somme est-elle 15 dans le carré initial ?

[Pour calculer cette somme] on additionne les 9 nombres puis on divise par 3 car c'est un carré de 3 sur 3.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ et $45 \div 3 = 15$

? La somme d'un carré magique de 3 sur 3 est donc toujours un multiple de 3, et cette somme est 3 fois le nombre du milieu. [C'est une conjecture]

Exemples :

- La somme à obtenir dans un carré contenant les nombres de 2 à 10 est 18, car le nombre central est 6 et $6 \times 3 = 18$.
- La somme à obtenir dans un carré contenant les nombres de 3 à 11 est 21, car le nombre central est 7 et $7 \times 3 = 21$

Nous avons trouvé une formule pour obtenir un carré magique plus rapidement.

On commence par placer le nombre du centre puis les autres en suivant la règle ci-contre.

La somme à obtenir est toujours $3 \times a$.

Exemple:

$(a+1) + (a+2) + (a-3) = 3 \times a$

$a+1$	$a+2$	$a-3$
$a-4$	a	$a+4$
$a+3$	$a-2$	$a-1$

4) Peut-on faire un carré magique avec des nombres tous pairs ou tous impairs ?

Voici une formule pour les calculer plus facilement : on multiplie par 2 ce que l'on ajoute à « a ».

$a+2$	$a+4$	$a-6$
$a-8$	a	$a+8$
$a+6$	$a-4$	$a-2$

Avec les pairs :

12	14	4
$a+2$	$a+4$	$a-6$
2	10	18
$a-8$	a	$a+8$
16	6	8
$a+6$	$a-4$	$a-2$

Avec les impairs :

11	13	3
$a+2$	$a+4$	$a-6$
1	9	17
$a-8$	a	$a+8$
15	5	7
$a+6$	$a-4$	$a-2$

5) Peut-on trouver un carré magique avec des nombres négatifs ?

[En voici de somme 30.]

$-2 + 10 + 22 = 30$

$13 - 2 + 19 = 30$

13	16	1
-2	10	22
19	4	7

On peut donc former un carré magique à partir du carré initial [avec la règle suivante] :

$a+1$	$a+2$	$a-3$
$a-4$	a	$a+4$
$a+3$	$a-2$	$a-1$

$a+3$	$a+6$	$a-9$
$a-12$	a	$a+12$
$a+9$	$a-6$	$a-3$

On obtient pour finir **une formule générale** pour les [des] carrés magiques de 3 sur 3 :

$a+x$	$a+2x$	$a-3x$
$a-4x$	a	$a+4x$
$a+3x$	$a-2x$	$a-x$

A partir de deux nombres donnés, a et x on peut donc construire un carré magique de 3 sur 3.

6) Peut-on trouver un carré magique de 4 sur 4 avec les 16 premiers nombres ?

Quelle doit être la somme à obtenir ?

Nous avons additionné tous les nombres, le résultat est 136.

Ensuite nous avons divisé 136 par 4, le résultat est 34. Donc la somme des nombres de chaque ligne et chaque colonne et chaque diagonale est 34.

On peut trouver un carré magique de 4 sur 4, avec les 16 premiers nombres.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

A partir des données de ce carré magique, on peut en construire d'autres.

Il suffit d'ajouter le même nombre à tous les nombres du carré.

Exemple: on a ajouté 12 à chaque nombre

donc la somme est :

$34 + 4 \times 12 = 82$

19	24	13	26
14	25	20	23
28	15	22	17
21	18	27	16

On peut faire un carré magique en mettant 16 et 13 ensemble sur une diagonale mais aussi 14 et 15 sans qu'ils soient alignés sur la même diagonale.

1	10	8	15
7	16	2	9
12	3	13	6
14	5	11	4

Nous avons trouvé une première formule pour les carrés de 4 sur 4, à partir du premier carré fabriqué.

a	$a+5$	$a-6$	$a+7$
$a-5$	$a+6$	$a-1$	$a+4$
$a+9$	$a-4$	$a+3$	$a-2$
$a+2$	$a-1$	$a+8$	$a-3$
