Les Polygones réguliers

Pholoé BONSERGENT Floriane FERRARA
Quentin HERSENT Yoann GONZALES année 2005

Jumelage MATh.en.JEANS entre le lycée Jean Moulin de Pézenas et le lycée d'altitude de Briançon.
Enseignants : Véronique CERCLE et Luc SAVIGNEUX du lycée de PEZENAS et Hubert PROAL pour le lycée de Briançon.

I : Introduction :

Nous avons voulu construire des polygones réguliers mais avec des contraintes.
Nous nous sommes d'abord demandé : comment les construire, en utilisant pour seuls instruments un compas et une règle non graduée ?
Puis, comme nous n'avons pas réussi à tous les faire, la question de savoir quels sont ceux constructibles s'est posée.

1. Mais tout d'abord d'où viennent les noms des polygones.

° Poly signifie plusieurs,
° Gone : angle.

Donc un polygone est une figure à plusieurs angles.
Les noms des polygones sont composés de leur nombre d'angles et du mot gone :

Ex : monogone : un angle.
Trigone : trois angles donc triangle

Ce nombre est écrit en grec ; pour compter en grec, il faut savoir
les nombres de 1 à 10 : hen, do, tri, tetra, penta, hexa, hepta, octo, ennea, deca ; ainsi que le nombre 20 = icosa
les multiplicandes : conta = dizaine, hecta = centaine, chilia = millier, myria = dix mille (une myriade)
et la conjonction : kai pour plus,

Quelques noms de polygones (Transparent n°1) :

- 4 : Tétragone ou quadrilatère
- 11 : Hendécagone
- 20 : Icosagone
- 21 : Icosikaihenagone ou icosihenagone
- 35 : Triacontakaipentagone

Devinette : Quel est le nom du polygone à 2131 côtés ?

2. qu'est-ce qu'un polygone **régulier** ?
C'est lorsque tous ses côtés sont égaux (même longueur) et tous ses angles sont égaux (même mesure).
Leurs sommets sont tous sur un même cercle.

II : Les polygones simples :

Le polygone le plus simple est le trigone régulier ou triangle équilatéral :

Pour le construire, il suffit de tracer un segment, de poser la pointe du compas sur une des extrémités et la mine sur l'autre. Sans déplacer la pointe du compas ni modifier la longueur, on trace un arc de cercle. Sans modifier la longueur, on place la pointe du compas sur l'autre extrémité du segment et on trace un deuxième arc de cercle. Le point de rencontre des deux arcs de cercles est le troisième sommet du triangle, les extrémités du segment étant les deux premiers. On relie les 3 sommets pour obtenir le trigone régulier. (Voir figure 1)

Il existe une autre manière pour construire un triangle équilatéral. Pour cela, il faut tracer un hexagone régulier (voir ci-dessous). En reliant un sommet sur deux on obtient un triangle équilatéral. (Voir figure 2 et transparent 2)

Par ordre de difficulté, vient l'hexagone régulier :

On trace un cercle C1, puis on pose la pointe du compas sur ce cercle C1 et sans modifier le rayon, on trace un cercle C2, les deux intersections de C1 et C2 sont deux sommets de l'hexagone. On pose la pointe du compas sur un des sommets et on trace C3 de rayon identique à C1 et C2, les deux intersections de C3-C1 sont deux autres sommets de l'hexagone. On répète l'opération jusqu'à avoir les 6 sommets puis on trace l'hexagone. (Voir figure 3 et transparent 3)

Le dernier est le carré :

Pour le construire, on trace un segment [AB] puis sa médiatrice afin d'obtenir un angle droit. Pour cela, on doit placer la pointe du compas sur l'extrémités A du segment, faire un arc de cercle au-dessus et en dessous, sans changer la longueur faire de même avec l'extrémité B du segment, en reliant les intersections des arcs de cercle, on obtient la médiatrice et donc un angle droit. (Voir figure 4)
Ensuite, avec le compas il faut prendre la mesure que l'on souhaite pour le côté et la reporter sur les deux droites perpendiculaires à partir de l'angle droit nommé C, on nommera ces points D et F. Il suffit alors de terminer le carré CDEF (Voir figure 5 et transparent 4)

multiplication par 2 du nombre de côtés :

Un polygone étant construit, on peut partager en deux chaque côté : il suffit de tracer le cercle qui joint tous ses sommets, les médiatrices des côtés coupent alors le cercle en les sommets cherchés.

On obtient une figure avec deux fois plus de côtés.
On obtient ainsi $3\times2=6$; $3\times2\times2=12$; $3\times2\times2\times2=24$; $4\times2=8$; $4\times2\times2=16$…
(Voir transparents 5 et 6)
Nous avons ainsi obtenu que les polygones dont le nombre de côtés est 2^n ou 3×2^n sont constructibles;
Plus généralement, si on arrive à construire le polygone à k côtés, on pourra en déduire les polygones à $k\times2^n$ côtés

multiplication par 3 du nombre de côtés :

Nous avons donc ensuite essayé de partager le côté en 3.
Ce problème revenait à partager l'angle au centre (AOB où O est le centre du cercle , A et B deux sommets consécutifs) en trois.

Comment couper un angle en trois angles égaux ?

Nous avons recherché une technique pour séparer un angle en trois angles égaux. Mais nous n'avons pas réussi. Après de nombreuses tentatives nos professeurs nous ont avoué que ce problème est d'ailleurs connu (la trisection de l'angle), et qu' il a été démontré que cette construction est impossible à la règle et au compas.
On ne pourra donc pas obtenir de polygone à $k*3^n$ côtés à partir du polygone à k côtés

III : Les angles :

On a alors réfléchi sur la valeur des angles au centre :
Il faut donc couper un cercle trigonométrique en n côtés. (Voir transparent 7)

l'angle au centre est $2\pi/n$ où n est le nombre de côté (n : nombre entier positif)

remarque : c'est grâce à la trigonométrie que nous avons pu construire le pentagone. On a construit les points $\pi/5$ et $-\pi/5$ du cercle trigonométriques ; le segment qui les relie est de même longueur qu'un coté du pentagone. (Voir la suite)

IV: L'écart :

N'arrivant pas à construire les angles voulus, nous avons cherché à calculer l'écart entre le côté du polygone à n côtés à construire et son cercle circonscrit.

Appelons x la différence entre le rayon et le côté du polygone à construire.

Grâce à la trigonométrie nous avons obtenu les formules suivantes :

$$\cos\alpha = (r - x) / r$$

$$x = r - r\cos\alpha$$

On s’est demandé ensuite à quoi était égal α : => $\alpha = 360° / n \times ½ = 180° / n$
$\alpha = \pi / n$ (en radians) où n est le nombre de côté voulu.

Il nous faut donc pouvoir construire cos (π/n).

V: Calcul de cos (π /5) et construction pentagone :

(Voir transparent 8)

$\cos(\pi / 5) = (1 + \sqrt{5}) / 4$

Pour avoir $\sqrt{5}$ il faut tracer un triangle rectangle donc un côté fait 1 et l’autre 2 unités. L’hypoténuse de ce triangle a pour mesure $\sqrt{5}$ U, selon le théorème de Pythagore. Ensuite, il suffit de tracer un cercle de rayon 1 U. Puis reporter la distance de l’hypoténuse sur une droite D passant par le centre du cercle, à l’extérieur.
Nous obtenons ainsi un segment de $1 + \sqrt{5}$ U.
Il suffit de le diviser en quatre. Pour cela, on le coupe en 2 puis à nouveau en 2 à l’aide de médiatrices.
En traçant la perpendiculaire à la droite D passant par le point obtenu, on trace le premier coté du pentagone, pour finir la construction, il suffit de reporter sa longueur à l’aide du compas. (Voir figure 6 et transparent 9)

Remarque : Avec la multiplication par 2, il est ensuite possible d’obtenir les polygones à 5×2^n côtés, par exemple $5\times2=10$; $5\times2^2=20$…

VI : Le pentadécagone :

Grâce à l’égalité $\frac{2\pi}{15}=\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{3}$
(Voir transparent 10)

VI : Cas impossibles

Voyant que cela fonctionnait avec cos (π /5), nous avons tenté de faire l’heptagone en prenant "n = 7".
Nous avons donc essayé de calculer cos (π /7) en appliquant la même méthode que pour le calcul de cos (π/5).
A la fin du calcul nous arrivons à une équation du $3^{ème}$ degré que nous ne savons pas résoudre. Par conséquent nous n’avons pu construire l’heptagone. (Voir transparent 11)

VII : Théorème de GAUSS

Ce théorème dit : *Les polygones réguliers constructibles (à la règle et au compas) sont ceux dont le nombre de côtés est de la forme* 2^{α} *avec* $\alpha \geq 2$ *ou de la forme* $2^{\alpha} \times P_1 \times P_2 \ldots Pr$ *avec* $\alpha \in N$ *et où les Pi sont des nombres* ***de Fermat premiers distincts*** (Voir transparent 12)

Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme P = $2^{2^{\beta}}+1$,

β = 0	P=3	premier
β = 1	P=5	premier
β = 2	P=17	premier
β = 3	P=257	premier
β = 4	P=65 537	premier

mais pour 5 ≤ β ≤ 30, il est établi que les nombres de Fermat sont composés (c'est-à-dire non premiers), donc les polygones correspondants ne sont pas constructibles

AINSI DONC NOUS AVONS PU CONSTRUIRE GRACE A LA REGLE ET AU COMPAS UN HEPTAKAIDECAGONE (17 côtés) (Voir transparent 13)

Réponse à la devinette :

dichiliakaihectokaitriacontakaihénagone.