Le lapin et le camion

2020-2021

Robinson HOSTIN, Joachim KERVAREC, Léo BARNABE, Mathilde GOARNISSON
(classe de terminale)

Établissement : Lycée Le Likès - La Salle, Quimper
Enseignant : Yann Cogan
Chercheur : On en cherche.

1 Présentation du sujet

Un lapin veut traverser une route de 4m de large alors qu'un camion arrive à 60 km/h et occupe toute la largeur de la route.
Le lapin court à 30 km/h et le camion est à 7 mètres du lapin.
Le lapin peut-il traverser la route sans être percuté par le camion ?

2 Annonces des conjectures et résultats obtenus

Un calcul rapide (voire très rapide) nous convainc que si le lapin traverse au plus court, il se fera percuter. Afin de faciliter la compréhension du lecteur, nous appellerons ce lapin, le *lapin crétin*.
S'il prend une trajectoire rectiligne qui fuit un peu le camion, on a l'impression qu'il allongera légèrement la distance à parcourir pour traverser, mais allongera davantage la distance que devra parcourir le camion pour le percuter. C'est peut-être une voie de salut. En paramétrant le problème avec le temps t, et les coordonnées du lapin dans un plan repéré, on parvient à formuler les conditions de survie du lapin. Heureusement pour lui, il est possible de trouver des trajectoires qui remplissent ces conditions. Nous définissons ces trajectoires selon deux modalités : quels points viser sur l'accotement opposé de la route; quels angles peut faire sa trajectoire avec celle du lapin crétin. Le lapin qui suit l'une de ces trajectoires sera appelé *lapin malin*.

Afin de mieux appréhender le problème nous avons l'idée de considérer toutes les directions possibles du lapin. Grâce à un logiciel de géométrie dynamique nous pouvons créer une animation où l'on voit le camion avancer en même temps que toutes les positions possibles du lapin à chaque instant. Ainsi on peut faire apparaître le lieu des impacts entre le camion et le lapin, qui ne semble pas être une figure géométrique connue.

Enfin, comme le problème est plan avec une évolution dans le temps, nous l'avons transformé en problème statique dans l'espace qui nous permet d'embrasser d'un seul regard toutes les trajectoires possibles du lapin, et tous les instants de sa course folle. Nous parvenons alors à déterminer la nature de la courbe des impacts entre le camion et le lapin.

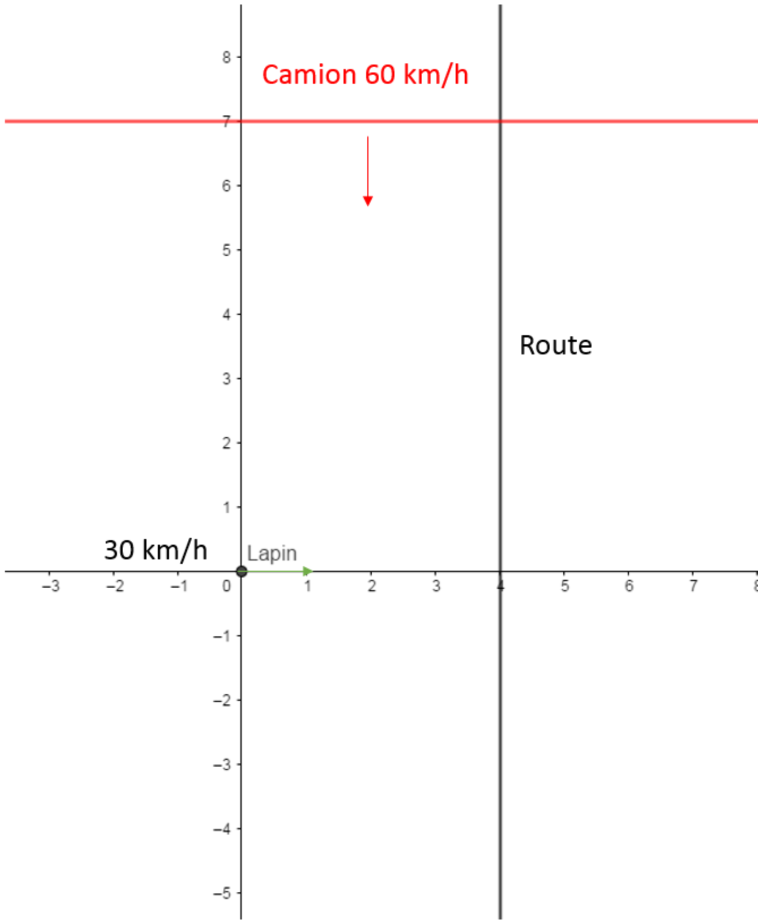
Connaître ce n'est point démontrer ni expliquer. C'est accéder à la vision.

Antoine de Saint Exupéry

3 Texte de l'article

3.1 Lapin crétin

Cas où le lapin décide de traverser au plus court.



Nous choisissons les unités : mètres pour les distances et secondes pour les temps.

La vitesse du lapin est :

$$v = 30\ km.h^{-1} = 30 \times \frac{1\,000}{3\,600}\ m.s^{-1} = 30 \times \frac{5}{18} m.s^{-1} = \frac{6 \times 5 \times 5}{6 \times 3} m.s^{-1} = \frac{25}{3} m.s^{-1}.$$

Son temps de traversée en secondes est donc :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{4}{\frac{25}{3}} = 4 \times \frac{3}{25} = \frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 0,48.$$

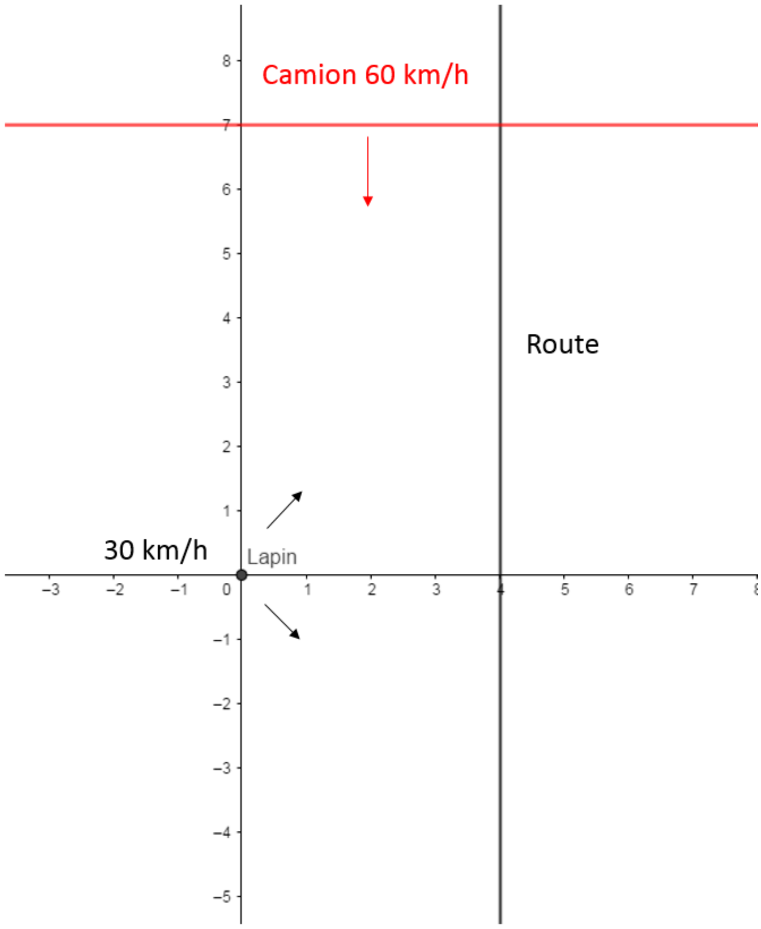
Or le camion arrive au niveau du lapin en un temps :

$$t = \frac{7}{\frac{50}{3}} = 7 \times \frac{3}{50} = \frac{21}{50} = \frac{42}{100} 0,42 < 0,48.$$

Le camion va donc percuter le lapin.

Remarque *: On pouvait conclure plus rapidement en observant que le camion va deux fois plus vite que le lapin. Donc quand le lapin fait 4 mètres le camion fait 8 mètres. Comme il est à 7 mètres du lapin, il l'aura percuté avant que le lapin franchisse la route.*

3.2 Lapin malin



Définissons :

- O la position du lapin au départ de l'action ;
- $\vec{i}$ le vecteur normé indiquant la direction du lapin crétin ;
- $\vec{j}$ le vecteur normé perpendiculaire à $\vec{i}$ dirigé vers le camion qui arrive.

Cela nous fournit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui nous permettra de repérer les positions au cours du temps et d'exprimer des distances à l'aide des coordonnées.

Au début du mouvement le camion est modélisé par la droite d'équation $y = 7$.

En appelant t le temps en secondes écoulé depuis le début de la scène on a les coordonnées du lapin :

$$L_t\left(x(t), y(t)\right)$$

Pour simplifier les écritures nous noterons simplement $L(x, y)$.

La vitesse du lapin nous donne une relation entre x, y et t (1) :

$$\begin{aligned} d &= v \times t \\ OL &= \frac{25}{3} \times t \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{25}{3} \times t \\ x^2 + y^2 &= \frac{625}{9} t^2 \end{aligned}$$

Position du camion en fonction du temps :

$$Y(t) = 7 - \frac{50}{3} t$$

Le lapin échappera au camion si, et seulement si, quand le camion arrive à la hauteur du lapin ($Y = y$), ce dernier a franchi la route ($x > 4$).

Substituons, dans la relation obtenue entre x, y et t, l'ordonnée y du lapin par l'expression en fonction du temps t de l'ordonnée Y du camion. Cela nous donnera une relation entre x et t, c'est à dire entre l'instant où le camion arrive à la hauteur du lapin et l'avancée du lapin dans sa traversée de la route.

$$\begin{aligned} x^2 + \left(7 - \frac{50}{3}t\right)^2 &= \frac{625}{9}t^2 \\ x^2 &= \left(\frac{25}{3}t\right)^2 - \left(7 - \frac{50}{3}t\right)^2 \\ x^2 &= \left(\frac{25}{3}t - \left(7 - \frac{50}{3}t\right)\right)\left(\frac{25}{3}t + \left(7 - \frac{50}{3}t\right)\right) \\ x^2 &= (25t - 7)\left(7 - \frac{25}{3}t\right) \end{aligned}$$

Considérons la deuxième condition : le lapin a franchi la route quand le camion arrive à sa hauteur :

$$\begin{aligned} x &> 4 \\ x^2 &> 16 \qquad \text{car } x \text{ est un nombre positif} \\ (25t - 7)\left(7 - \frac{25}{3}t\right) &> 16 \\ (25t - 7)(21 - 25t) &> 48 \\ -625t^2 + 700t - 195 &> 0 \\ -5 \times 125t^2 + (-5) \times (-140)t + (-5) \times 39 &> 0 \\ 125t^2 - 140t + 39 &< 0 \end{aligned}$$

Étude du signe du trinôme obtenu : $\Delta = (-140)^2 - 4 \times 125 \times 39 = 100 = 10^2 > 0$,

$$t_1 = \frac{-(-140) - 10}{2 \times 125} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0,52 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{-(-140) + 10)}{2 \times 125} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Or on sait, d'après la règle du signe du trinôme, que celui-ci est du signe du coefficient du terme de degré deux *(ici positif)*, sauf entre les racines, quand il y en a *(c'est le cas ici)*.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $S =]\,0,52\,;\,0,6\,[$.

Le lapin malin sait donc que s'il survit, sa traversée de la route aura duré entre 0,52 et 0,6 secondes. Il lui serait plus utile de savoir quel point du côté opposé de la route viser, ou quel angle il doit donner à sa course par rapport à la direction du lapin crétin.

Convertissons la condition sur t en condition sur y à l'aide de la relation qui existe entre la position Y du camion et le temps t :

$$0,52 \;<\; t \;<\; 0,6$$

$$7 - \frac{50}{3} \times 0,52 \;>\; 7 - \frac{50}{3}t \;>\; 7 - \frac{50}{3} \times 0,6 \quad \text{(on applique une fonction affine décroissante)}$$

$$-3 \;<\; y < -\frac{5}{3} \approx -1,67$$

Pour que le lapin puisse traverser la route et échapper au camion il doit viser entre les points (2) :

$$A\left(4\,;-\frac{5}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad B(4\,;-3).$$

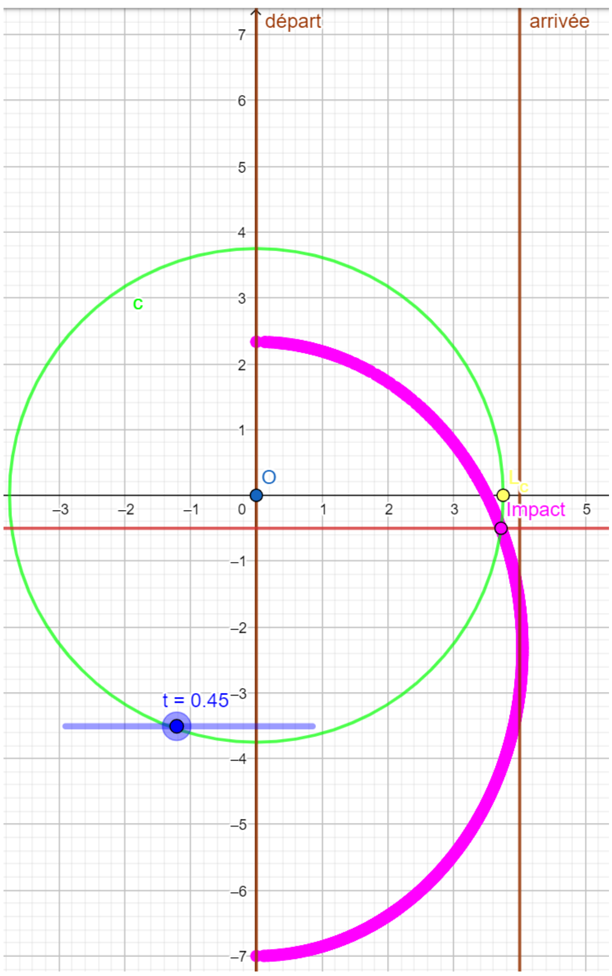
Déterminons des angles possibles pour le lapin malin par rapport à la direction du lapin crétin :
Avec le point $H(0,4)$, dans les triangles rectangles OHA et OHB, la trigonométrie fournit

$$\tan\alpha_1 = \frac{\frac{5}{3}}{4} = \frac{5}{12} \quad \text{donc} \quad \alpha_1 \approx 22{,}6^\circ \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{3}{4} \quad \text{donc} \quad \alpha_2 \approx 36{,}9^\circ.$$

Pour que le lapin puisse traverser la route et échapper au camion il doit partir dans une direction fuyant un peu le camion selon un angle compris entre 23° et 36° par rapport à la direction du lapin crétin. Nous lui conseillons même un angle de 30° pour avoir une marge optimale, parce qu'on ne sait jamais.

3.3 Embrasser toutes les directions possibles du lapin

Une démarche consiste à considérer toutes les directions possibles que peut prendre le lapin. À un instant t, l'ensemble des positions possibles du lapin est le cercle de centre O et de rayon $(25/3)\,t$.



À l'aide du logiciel Géogébra on peut tracer ce cercle en fonction du temps placé en curseur. On peut aussi positionner, en fonction du temps t, la droite modélisant l'avant du camion. Pour chaque valeur de t, l'intersection entre la partie droite de ce cercle et cette droite donne, si elle est non vide, un point d'impact entre le camion et le lapin. L'ensemble des points d'impact est matérialisé par la courbe en rose.

L'illustration présente la situation au moment $t = 0,45$ secondes. On voit qu'à ce moment le lapin crétin (en jaune) aurait déjà été impacté par le camion (après 3,5 mètres de course), et qu'il existe une direction du lapin telle qu'il se fait impacter par le camion à cet instant.

On voit aussi la zone de survie du lapin, qui est la partie de la courbe rose à droite de la droite d'équation $x = 4$.

Le lieu des points d'impact nous donne une information utile sur la situation. Tentons d'en exhiber une équation. Il suffit pour cela d'extraire le paramètre t du système :

$$\begin{cases} y = 7 - \dfrac{50}{3}t \\ x^2 + y^2 = \dfrac{625}{9}t^2 \end{cases}$$

La première égalité fournit $t = \dfrac{3}{50}(7-y)$.
Dès lors la seconde donne :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{625}{9} \times \frac{9}{2500}(7-y)^2 \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(7-y)^2 \\ 4x^2 + 4y^2 &= 49 - 14y + y^2 \\ 4x^2 + 3y^2 + 14y - 49 &= 0 \end{aligned}$$

On contrôle au passage que les couples $(3,5\ ;\ 0)$ et $(4\ ;\ -3)$ sont solution.
Cette équation nous permet de retrouver les résultats sur la survie du lapin, laissés à la sagacité du lecteur.
En posant $x = 0$, on appréhende aussi ce qui se passe dans le cas d'un *lapin suicidaire* (espérance de vie minimale) et d'un *lapin trouillard* (espérance de vie maximale en cas de non survie).

On se demande quelle est la nature de la courbe rose des impacts entre le lapin et le camion dont l'équation est :

$$4x^2 + 3y^2 + 14y - 49 = 0$$

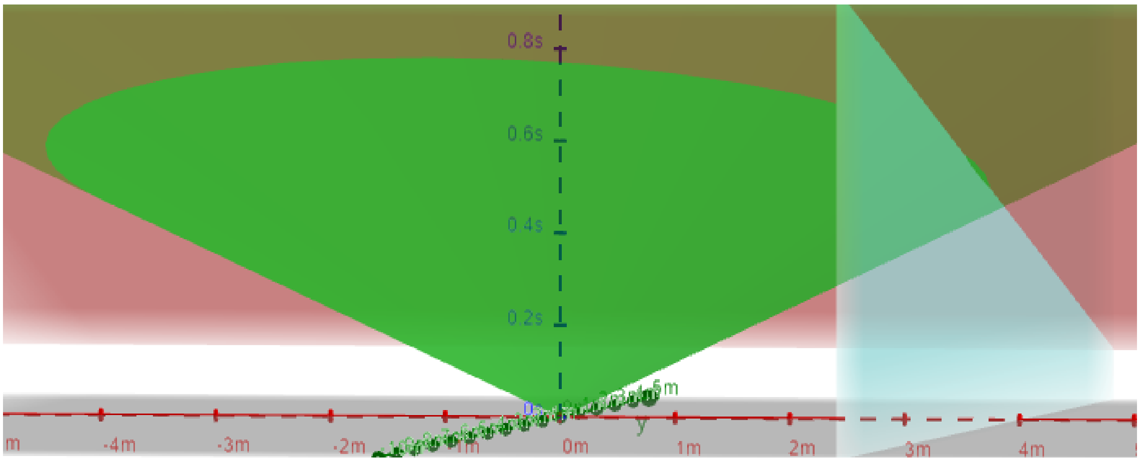
Cela ressemble à une équation de cercle, sauf que les coefficients des termes de degré deux ne sont pas égaux...
La courbe ressemble à un cercle mais comme écrasé, ce que l'on pourrait appeler un ovale...

3.4 Prise de hauteur

Nous sommes confrontés à une situation dans un plan avec :
— un cercle qui grandit dans le temps (positions possibles du lapin) ;
— une droite qui avance (front avant du camion).

L'animation Géogébra est sympathique, mais le présent article est statique. En outre, même l'animation ne permet pas d'embrasser tous les instants en même temps, pour cela il faudrait être Dieu... ou mathématicien.

Ajoutons à notre repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le vecteur $\vec{k}$ pour repérer l'espace-temps à trois dimensions avec $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où l'axe du temps est dirigé vers le haut. On obtient la représentation suivante :



Le paramètre t est remplacé par la troisième dimension, verticale.

— Le plan rouge (d'équation $y = 7 - \frac{50}{3}t$) représente la position du front avant du camion,
— le plan vertical bleu-vert (d'équation $x = 4$), représente le côté de la route opposé au lapin,
— le cône vert (d'équation $x^2 + y^2 = \left(\frac{25}{3}t\right)^2$) quant à lui représente les positions du lapin selon toutes les directions possibles. On sait que c'est un cône car si on multiplie les trois nombres x, y et t par un même nombre, l'équation reste équivalente (à même valeur de vérité). On sait que c'est un cône de révolution d'axe $(O, \vec{k})$ car si on fixe la valeur de t, on obtient l'équation d'un cercle.

Pour que le lapin s'en sorte et ait traversé la route, il faut qu'il ait dépassé le plan bleu-vert mais qu'il se situe toujours en dessous du plan rouge. On peut voir cette petite zone de survie dans l'espace-temps sur le cône vert, sous le plan rouge et à droite du plan bleu-vert (3).

Ainsi on visualise simultanément les lieux et les moments de chaque situation, en particulier pour les impacts et les survies.

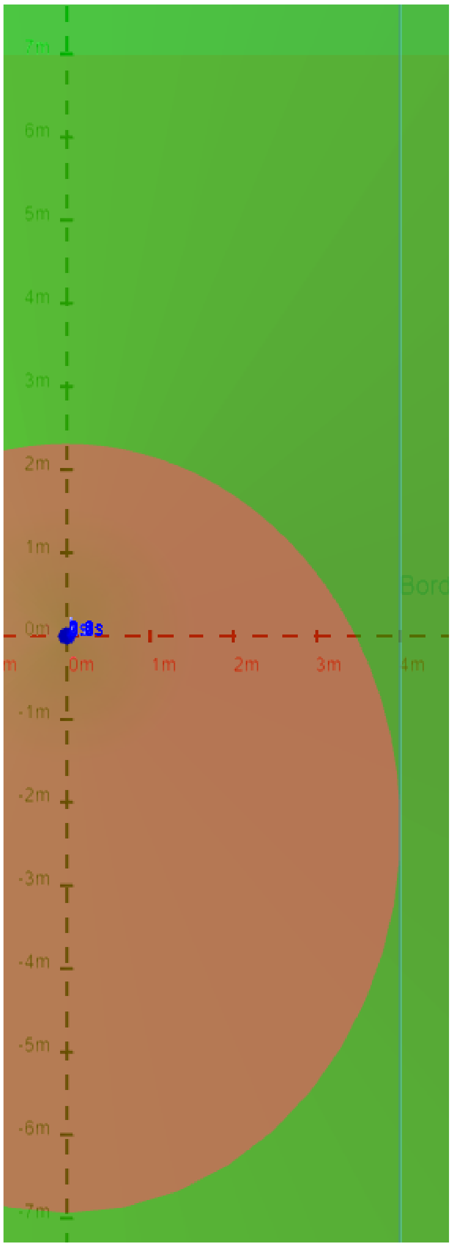
Tous les résultats observés graphiquement peuvent se retrouver algébriquement à l'aide des équations.

La vue de dessus ci-contre écrase le temps et est conforme à celle obtenue au paragraphe précédent.

On s'aperçoit que la courbe rose obtenue au paragraphe précédent matérialisant l'ensemble des points d'impact du lapin et du camion est une portion du projeté orthogonal sur le plan d'équation $t = 0$ de l'intersection du plan rouge avec le cône vert.
Or l'intersection d'un plan et d'un cône est ce que l'on appelle une conique. Quand l'angle formé entre l'axe du cône et le plan est supérieur à l'ouverture du cône, cette conique s'appelle une ellipse. C'est le cas ici car le camion va plus vite que le lapin.

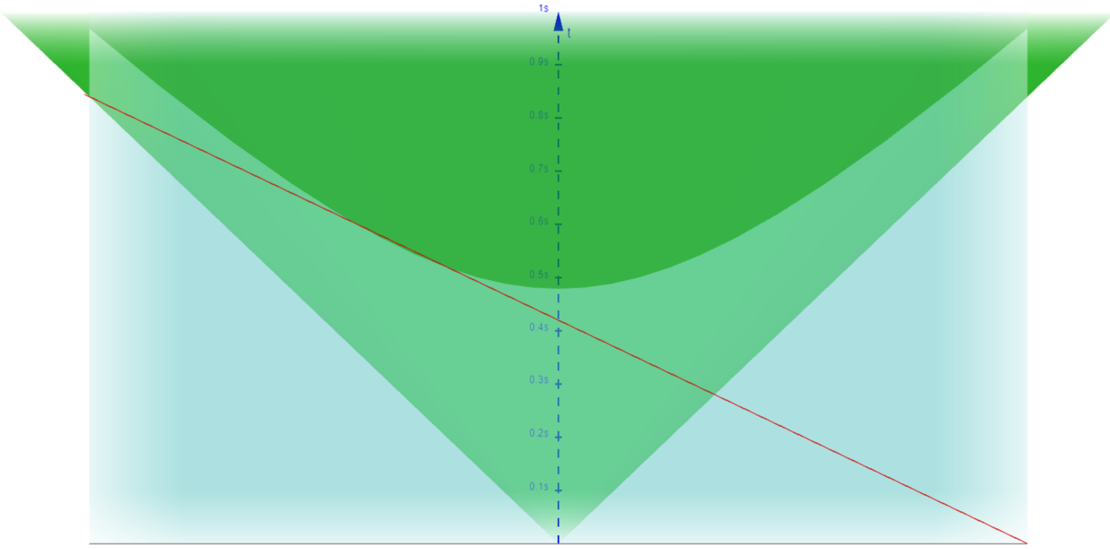
Si le lapin allait plus vite que le camion, la courbe des impacts serait une branche d'hyperbole, et s'il allait à la même vitesse que le camion, la courbe des impacts serait une branche de parabole.

On démontre que le projeté orthogonal d'une ellipse sur un plan est encore une ellipse (on peut le faire à l'aide des équations). On en déduit que la courbe rose, appelée en langage courant "ovale", s'appelle mathématiquement une ellipse.



La vue de côté ci-dessous est prise de derrière le bord de la route à atteindre (4). On peut y visualiser les scénarios du *lapin suicidaire* (à droite) et du *lapin trouillard* (à gauche), et même le moment où le *lapin crétin* se fera écraser par le camion (au milieu).
On peut ainsi, par des considérations purement géométriques, établir en particulier que

- le *lapin trouillard* se fera percuter après 7 mètres de course ;
- le *lapin suicidaire* se fera percuter après $\frac{7}{3} \approx 2,67$ mètres de course ;
- l'espérance de vie du *lapin trouillard* est trois fois plus grande que celle du *lapin suicidaire*



On observe aussi, à l'intersection du plan bleu-vert et du cône vert, le lieu dans l'espace-temps des arrivées théoriques du lapin de l'autre côté de la route. On pourrait démontrer qu'il s'agit d'une branche d'hyperbole. Presque tous ces lieux sont situés “au-dessus” du plan rouge, c'est à dire après le passage du camion, le lapin ne les atteindra pas. La zone de survie est délimitée par les points d'intersection de l'hyperbole et de la droite rouge (intersection du plan rouge et du plan bleu-vert).

4 Conclusion

Nous avons vu qu'un problème de lapin tentant d'échapper à un camion pouvait s'appréhender en paramétrant la situation à l'aide du temps et des coordonnées du lapin dans un repère judicieusement choisi. La manipulation des équations obtenues a permis de répondre à la question vitale qui se posait.
Un enrichissement de la vision du problème a consisté à envisager toutes les directions possibles du lapin. La manipulation des équations a fourni l'équation de la courbe des impacts possibles entre le camion et le lapin. Cette courbe et cette équation permettent d'obtenir des réponses à diverses questions. Cependant, cette équation et cette courbe ne figurent pas dans notre répertoire de connaissances.
Après avoir considéré simultanément toutes les directions possibles du lapin, nous avons considéré en plus tous les instants de toutes les courses possibles en utilisant le fait que le problème était plan, et que nous avons quelques repères mentaux et quelques connaissances dans l'espace. Nous avons ainsi pu déterminer que la courbe des impacts appartient à la famille des coniques, et à la sous-famille des ellipses.

En conclusion de la conclusion nous retenons ceci :

Le chemin le plus court n'est pas toujours la meilleure route vers le succès.

Notes d'édition

(1) On suppose dans tout l'article que le lapin se déplace en ligne droite (comme indiqué dans la présentation des résultats). Cela est naturel, puisque si le lapin arrive en un point L avant le camion ($Y > y$) il y arrivera a fortiori en prenant le chemin le plus court ; dans ce cas on a $Y(t) > y(t)$ tout le long du trajet, puisque la vitesse du lapin est inférieure à celle du camion, et le lapin ne peut pas non plus avoir été percuté sur son chemin.

(2) Formellement, on a calculé les ordonnées y non pas du point d'arrivée sur l'autre bord de la route ($x = 4$), mais celles du point où le lapin et le camion se trouvent à la même hauteur ($Y(t) = y(t)$). Mais ces deux ordonnées varient dans le même sens quand le lapin modifie sa direction et pour les valeurs limites -3 et $-5/3$ le lapin se trouve à la même hauteur que le camion pour $x = 4$, et elles coïncident. Les ordonnées y à viser par le lapin sur le bord $x = 4$ sont donc bien aussi celles comprises entre -3 et $-5/3$.

(3) Sur la figure, il n'est représenté que la partie du plan bleu située en-dessous du plan rouge, limitée par leur intersection $x = 4$, $y = 7 - 50t/3$. Le cône est représenté en vert brillant pour sa partie en-dessous du plan rouge et pour la partie au dessus, le plan rouge apparaît en couleur sombre.

La petite zone verte à droite de l'intersection des plans rouge et bleu correspond donc aux points où le lapin peut dépasser le bord opposé de la route sans être atteint par le camion.

(4) Dans cette figure, la direction de projection est parallèle à l'axe Ox et on a en abscisse la hauteur y ; le plan bleu est vu frontalement et le plan rouge apparaît comme une droite (la droite rouge).

Dans le rectangle où le plan bleu est représenté, la partie du cône derrière le plan bleu ($x < 4$) est représentée en plus clair. La limite des zones claire et foncée est l'intersection du cône avec le plan bleu ; comme ce plan est parallèle à l'axe du cône, il s'agit bien d'une branche d'hyperbole.

Enfin, les trajectoires possibles du lapin sont les génératrices du cône et sur chacune d'entre elles on peut voir le point d'arrivée au bord opposé de la route (intersection avec la branche d'hyperbole) et le point où le camion se trouve à la même hauteur que le camion (intersection avec la droite rouge).