Le jeu de set

Année 2013- 2014

DUCHENE Quentin, PILLOT Camille et MONCEL Mylène en seconde et LIEHN Damien, RAMOS Anthony et FIDAN Onur en première

Lycée Ernest Bichat à Lunéville

Professeurs : BOUVART-LAMBOIS Geneviève et FABRY Christine

Chercheur : STEF André (Institut Elie Cartan, Nancy)

Présentation du sujet

Répondre à des problématiques autour du jeu de set :

- Comment jouer au jeu de set ? (1)
- Pour deux cartes définies, y a-t-il toujours une et une seule carte qui complète le set ?
- Combien y-a-t-il de sets au jeu de set ?

Conjectures et résultats obtenus

Pour deux cartes définies,il existe une et une seule carte qui complète le set .

n étant le nombre de critères, on obtient : $\frac{3^n(3^n-1)}{6}$ sets dans le jeu.

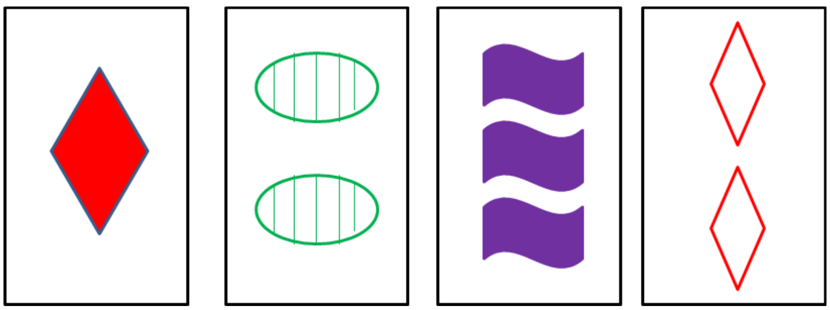
Le jeu de set

Le jeu de SET est un jeu de cartes.

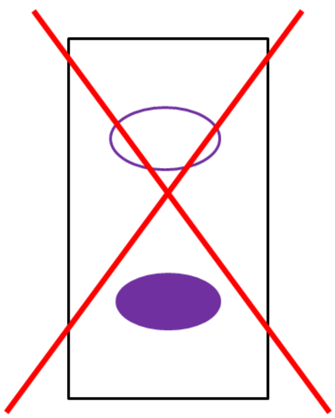
Chaque carte est caractérisée par des critères :

- La forme : losange, ovale, vague
- Le remplissage : vide, hachuré, plein
- La couleur : rouge, vert, violet
- Chaque carte comporte 1, 2 ou 3 figures.

Voici quelques exemples de cartes possibles. (2)



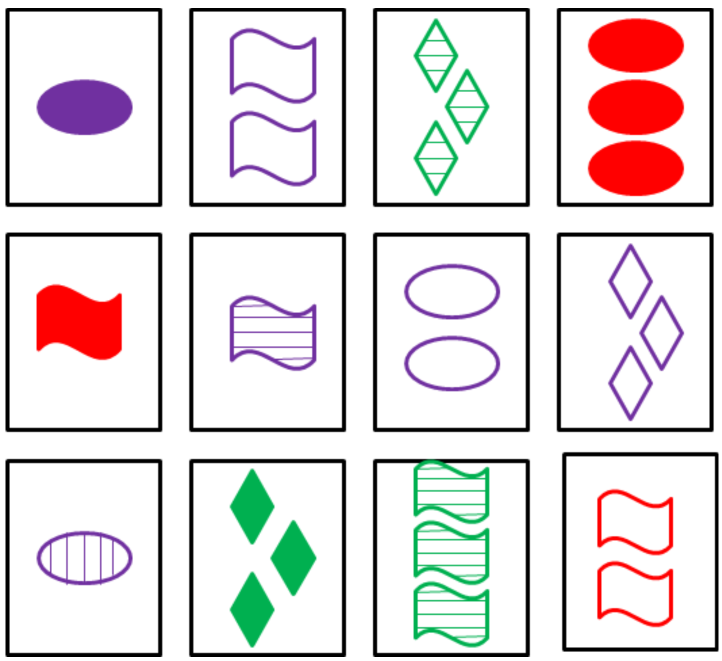
Chaque carte est unique.
Voici un exemple de carte impossible car les deux figures représentées sur la carte sont différentes.



Il y a donc 3 formes, 3 couleurs, 3 remplissages et 3 possibilités de nombre. Chaque carte est unique et toutes les cartes sont possibles. Par conséquent, on a 3^4 (3x3x3x3) soit 81 cartes dans le jeu de SET.

Jouer au jeu de SET :

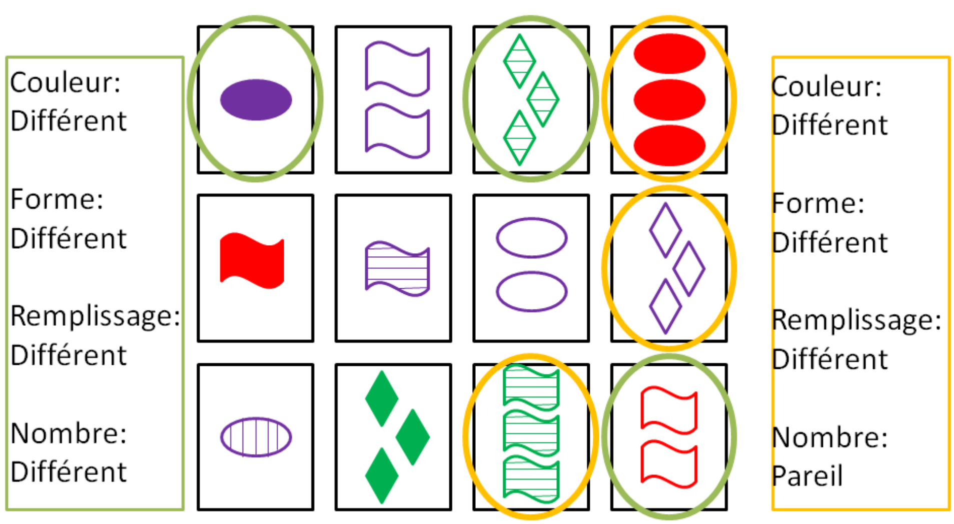
Pour jouer au jeu de SET, on effectue tout d'abord un tirage de 12 cartes que l'on pose sur la table de cette manière.



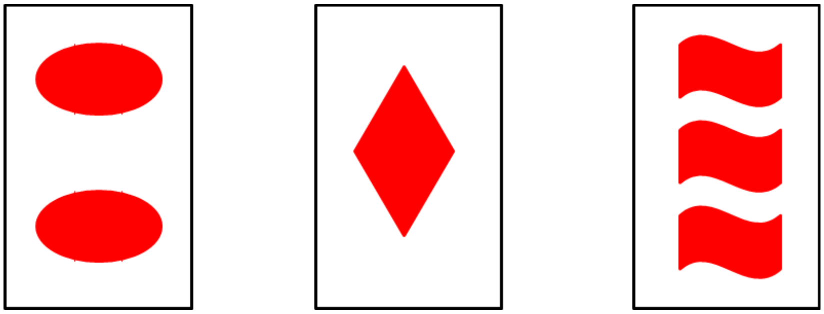
Le but est de former des Sets.

Qu'est-ce qu'un SET ?

Un SET est un ensemble de trois cartes, qui, pour un même critère sont soit toutes différentes soit toutes identiques. Par exemple, ici nous avons deux sets (indiqués par des couleurs différentes), commentés respectivement par les colonnes de droites et de gauche.



Encore un autre exemple de SET : dans ce cas là, la couleur est identique ainsi que le remplissage, mais le nombre et la forme sont différents .



Le codage

Pour simplifier les démonstrations qui vont suivre, nous avons mis en place un système de codage : une carte est caractérisée par un quadruplet où chaque nombre représente un critère. Suit le choix du codage :
- Nombre : 1 figure = 1 ; 2 figures = 2 ; 3 figures = 3
- Forme : Losange = 1 ; Ovale = 2 ; Vague = 3
- Couleur : Vert = 1 ; Rouge = 2 ; Violet = 3
- Remplissage : Vide = 1 ; Hachuré = 2 ; Plein = 3

Chacune des possibilités d'un critère est appelée "item".
Exemple : (2 ; 1 ; 2 ; 3) donne la carte contenant « Deux losanges rouges pleins ».

Pour deux cartes définies, y a-t-il toujours une et une seule carte qui complète le set ?

Nous sommes partis du fait que par définition, pour chaque critère, toutes les cartes doivent présenter des items tous identiques ou tous différents. Dans ce cas là, deux items définis « appellent » un troisième. Nous avons donc procédé ainsi pour chaque critère jusqu'à obtenir une carte.
On commence par chercher le premier critère. Pour trouver le premier item de la troisième carte, on se base sur le premier item des première et deuxième cartes. Si le premier item de la première carte est identique au premier item de la deuxième carte, alors le premier item de la troisième carte est nécessairement identique à ceux des première et deuxième cartes. Dans le cas contraire, le premier item de la troisième carte est obligatoirement le seul qui n'est pas représenté sur les deux premières car obligatoirement différent des deux autres (On rappelle que chaque critère peut être représenté par trois items différents).
Comme les trois autres critères obéissent aux même règles que le premier, on peut leur appliquer le même raisonnement. Il n'existe donc qu'un seul item possible pour la troisième

carte à chaque critère. Par conséquent, quelque soit le tirage des deux premières cartes, il n'existe qu'une seule et unique carte pour compléter le set.

Exemple :

(2 ; 1 ; 2 ; 3)	+	(1 ; 3 ; 2 ; 1)	--------->	(3 ; 2 ; 2 ; 2)
Deux losanges rouges pleins	et	Une vague rouge vide	appellent	Trois ovales rouges hachurés

Combien y-a-t-il de sets possibles au jeu de set ?

Pour résoudre ce problème, nous l'avons simplifié en diminuant le nombre de critères et ainsi le nombre de cartes.

Première méthode :

Nous avons donc tout d'abord cherché combien il y a de sets avec 2 critères et ainsi 3^2 cartes (3 couleurs et 3 nombres) soit 3*3 = 9 cartes.

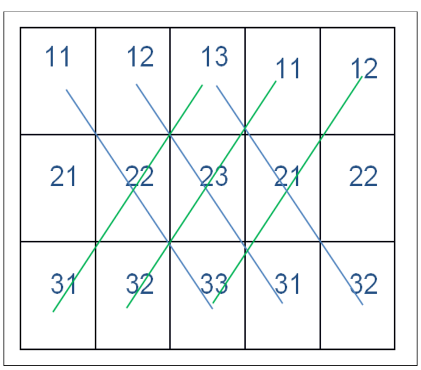
Pour 2 critères :

Principe de dénombrement

Tableau 1

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Tableau 2



Dans le tableau 1 on considère successivement les lignes puis les colonnes puis les deux diagonales.

Dans le tableau 2 constitué de deux tableaux 1 accolés, on considère les nouvelles “diagonales” obtenues. (3)

Sets : 11-12-13 ; 21-22-23 ; 31-32-33 ; 11-21-31 ; 12-22-32 ; 13-23-33 ;

11-22-33 ; 13-22-31 ; 12-23-31 ; 13-21-32 ; 12-21-33 ; 11-23-32

Il y a donc 12 sets pour 2 critères.

Pour 3 critères :

Nous avons ensuite cherché combien il y a de sets avec 3 critères (3 couleurs, 3 nombres et 3 formes) et ainsi 3^3 cartes soit 3*3*3 = 27 cartes.

Afin de simplifier le dénombrement, nous ordonnons les sets dans l’ordre des nombres qui codent les cartes. Ainsi, nous avons dénombré le nombre de sets différents commençant par 111 pour 3 critères : 111-112-113, 111-121-131, 111-122-133, 111-123-132, 111-211-311, 111-212-313, 111-213-312, 111-221-331, 111-222-333, 111-223-332, 111-231-321, 111-232-323, 111-233-322. il y en a 13 . Puis commençant par 112 : il y en a 12 car le set 111-112-113 a déjà été compté précédemment en commençant par 111.

Avec ces résultats, nous nous sommes dit que le nombre de sets diminuait de 1 à chaque fois et qu'il y avait donc :

13+12+11+...+2+1= **91 sets**

Vérification :

Nous avons ensuite vérifié cette démarche pour 2 critères où nous sommes sûrs qu'il y a 12 sets.

Nombre de sets différents commençant par 11 : 4.

Donc nombre de sets avec la méthode précédente : 4+3+2+1= **10 sets.**

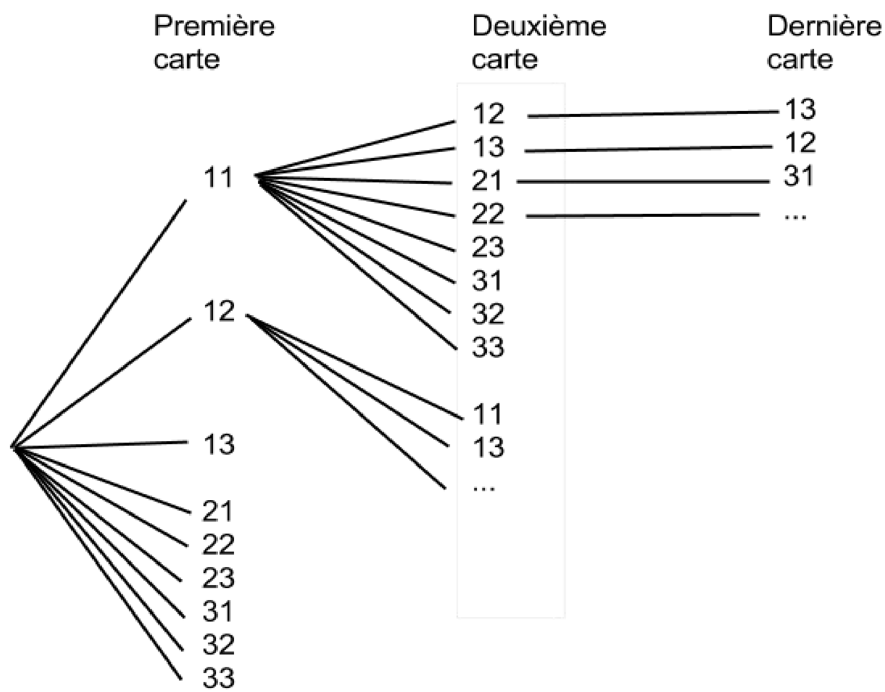
Donc, la méthode proposée est fausse !

Deuxième méthode :

Pour 2 critères :

Nous avons comme précédemment 9 cartes : 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Il y a donc 9 façons de choisir la première carte, 8 façons de choisir la seconde carte et la dernière carte est imposée. (Voir arbre ci-dessous)



Il y a donc 9×8×1 = 72 triplets de cartes.

Or il y a plusieurs triplets qui correspondent au même set.

(11 ; 12 ; 13), (11 ; 13 ; 12), (12 ; 11 ; 13) ; (12 ; 13 ; 11), (13 ; 11 ; 12) et (13 ; 12 ; 11)

Il y a 6 permutations possibles donc 6 façons d'écrire un set en le considérant comme un triplet (alors qu'un set est un ensemble de 3 cartes)

72/6=12

Dans un jeu avec 2 critères il y a donc 12 sets.

Ce résultat est le même que trouvé précédemment.

Pour 4 critères :

Dans notre jeu avec 4 critères on a : $\frac{3^4(3^4-1)}{6}=\frac{6480}{6}=1080.$

Il y a donc 1080 sets dans un jeu à 4 critères.

Pour n critères :

Nous avons donc ensuite étendu cette démarche simplifiée avec un nombre n de critères.

On obtient donc la formule suivante : (nb = nombre)

$$\frac{3^{nb\,de\,critères}(3^{nb\,de\,critères}-1)}{6}$$

n étant le nombre de critères, on obtient $\frac{3^n(3^n-1)}{6}$ sets possibles.

Notes d'édition :

(1) Il ne s'agit pas de donner des stratégies pour jouer au mieux au jeu du set mais simplement de décrire les régles de ce jeu.

(2) Dans le jeu commercial, les losanges sont représentés dans l'autre sens, mais cela ne change pas fondamentalement le problème.

(3) Le tableau 2 est en fait constitué d'un tableau 1 puis des deux premières colonnes du tableau 1. Les diagonales représentées sont toutes les diagonales obtenues. Parmi elles, les diagonales 11-22-33 et 13-22-31 ne sont pas "nouvelles". Elles étaient déjà obtenues dans le tableau 1. On peut se convaincre que tous les sets ont été bien obtenus en observant que chaque paire de cartes possibles se retrouve sur une ligne, sur une colonne ou sur une diagonale d'un des deux tableaux. Comme deux cartes se complètent de manière unique en un set, tous les sets sont obtenus de cette manière.