Le voyageur

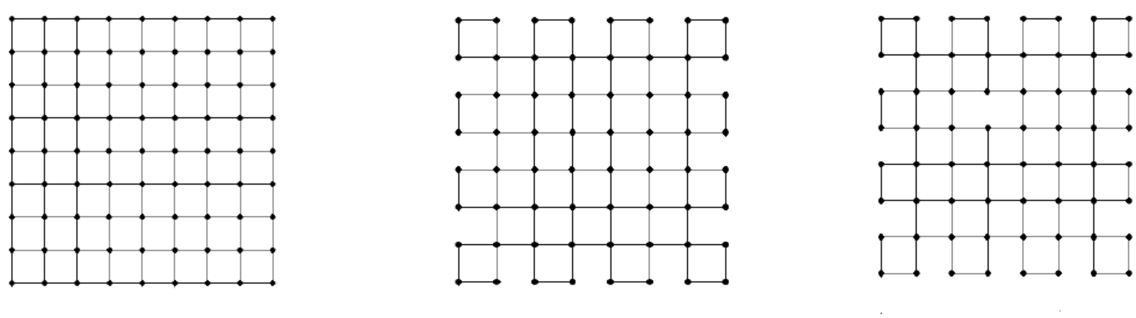
Année 2009 - 2010

Élèves de 4ème : Myriam Aït Iharrou, Laura Besse, Solène Bourquin, Dylan De Lima Viana, Maxime Furet, Thomas Monnot.

Établissement : Collège Bartholdi – 92100 Boulogne-Billancourt

Sujet

Un voyageur visite un certain nombre de villes reliées entre elles par un certain nombre de routes. Dans les schémas ci-dessous, les points représentent les villes et les lignes représentent les routes.

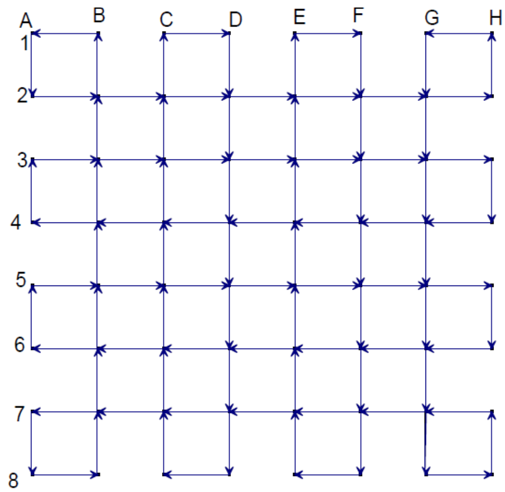


Dans quels cas le voyageur peut-il visiter toutes les villes en passant une fois exactement par chaque route ?

1ère étape : répondre à la question posée.

Nous avons commencé par essayer différents circuits sur les trois réseaux proposés. Après plusieurs tentatives, nous avons pu répondre à la question : le voyageur peut visiter toutes les villes en passant une fois exactement par chaque route dans les cas 2 et 3.

Cas 2



Un chemin : G2 – H2 – H1 - G1 – G2… G8 – H8 – H7 – G7 – F7 – E7 – D7 – C7 – B7 – A7 – A8 – B8 - … B1 – A1 – A2 – B2 – C2 – C1 – D1 – D2 - … D8 – C8 - … C2 – D2 – E2 – E1 – F1 - … F8 – E8 – E7 – E6 – D6 – C6 – B6 – A6 – A5 - … H5 – H6 – E6 – E5 – E4 - … A4 – A3 - … H3 – H4 – G4 – F4 – E4 – E3 – E2 – F2 – G2

Cas 3

Un chemin : D4 – … A4 – A3 – …H3 – H4 – G4 – F4 - E4 – D4 – … D8 – C8 – … – C1 – D1 – D2 – C2 – B2 – A2 – A1 – B1 – … B8 – A8 – A7 - … H7 – H8 – G8 - … G1 – H1 – H2 – G2 – F2 – F1 – E1 – … E8 – F8 – F7 – F6 – E6 – D6 – C6 – B6 – A6 – A5 – … H5 – H6 – G6 – F6 – … F2 – E2 – D2 – D3.

2ème étape : recherche d'un critère.

1) En comparant les trois circuits, pour comprendre d'abord pourquoi ce n'était pas possible dans le cas 1, nous avons remarqué que :

• Le réseau 2 est le même que le 1 sauf pour les villes des « bords » (première et dernière lignes, première et dernière colonnes) auxquelles une ou deux routes ont été rajoutées (avec un motif en carré). Plus précisément : une route pour celles qui en avaient trois, et deux pour celles qui en avaient deux.

• Le réseau 3 est identique au 2 sauf que une route joignant deux villes a été supprimée. Donc deux villes avec quatre routes se retrouvent avec trois routes.

Nous avons donc conclu que le critère concernait le nombre de routes, et qu'il s'agissait d'une question de parité.

Après d’autres essais pour préciser notre idée du critère, nous avons pensé qu’il fallait que chaque ville ait un nombre pair de routes, peu importe le nombre de villes. Mais le réseau 3 avait des villes (2) avec trois routes.
Notre hypothèse fut alors qu’il fallait que ces villes avec un nombre impair de routes, soient en nombre pair (ainsi on obtiendrait un nombre pair finalement, de routes). Mais le réseau 1 correspond à ce « critère », or il n’y a pas de circuit voulu.

2) Il fallait donc préciser ce nombre pair de villes ayant un nombre impair de routes. Nous avons fait de nouveaux essais, avec des réseaux comportant : aucune ville, puis deux villes, quatre villes, six villes… dix et même cents villes (!) avec un nombre pair de routes.

3) En conclusion, seuls les réseaux ayant zéro ou deux villes avec un nombre impair de routes répondaient à la question. D’où :

Critère : Dans un réseau de villes reliées par un certain nombre de routes, si on veut traverser toutes les villes en empruntant chaque route une fois et une seule, alors le nombre de villes ayant un nombre impair de routes doit être zéro ou deux. (1)

3ème étape : Démontrer.

1) Pourquoi ce critère est-il nécessaire ? (2)

Chaque route relie deux villes (qui peuvent être reliées par d'autres routes). Donc chaque route mène à une ville ou part d'une ville, et chaque ville est un départ ou une arrivée.
Il est donc nécessaire d'avoir « une route départ » et « une route arrivée » - donc deux routes (ou quatre, six....) - distinctes si on veut traverser chaque ville sans réemprunter la même route.
Dans le cas de toutes les villes avec un nombre pair de routes : toute ville est à la fois départ et arrivée, et on peut partir de n'importe laquelle pour effectuer le circuit voulu. Dans le cas d'un réseau avec deux villes ayant un nombre impair de routes : ces deux villes seront ou le départ du circuit ou l'arrivée, mais pas les deux à la fois. Et les autres villes doivent avoir un nombre pair de routes .

2) Pourquoi ce critère est-il suffisant :

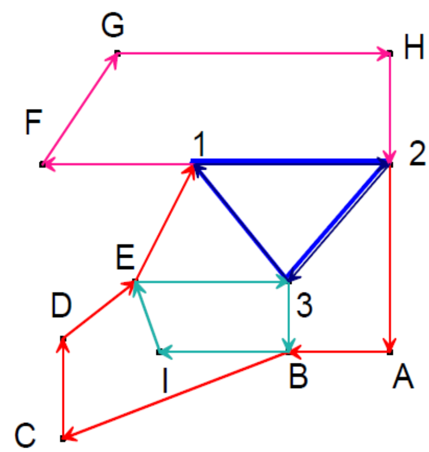
Reste à montrer que si ce critère est nécessaire, il est aussi suffisant, c'est-à-dire qu'il sera possible de trouver un circuit répondant à la question dans tout réseau ne possédant que zéro ou deux villes avec un nombre impair de routes.

Supposons que l'on sache résoudre le problème pour des graphes ayant strictement moins de n sommets. (3)

Considérons alors un graphe à n sommets. Soit il a deux sommets reliés a un nombre impair de villes (notons les a et b, a sera le départ, b l'arrivée), soit il n'a que des sommets reliés à un nombre pair de villes, auquel cas on choisit un sommet quelconque, noté a, qui sera le départ comme l'arrivée.
On effectue un parcours au hasard en partant de a, sans repasser deux fois par une même arête. Si l'on ne peut plus continuer, c'est que l'on est à l'arrivée (b ou a, selon le cas). (4) Notons L le parcours effectué.

Une question reste en suspens: ce chemin parcourt-il toutes les arêtes ? Il est possible que non.
Effaçons toutes les arêtes que l'on a parcourues. Que reste-t-il ? Les arêtes que l'on n'a pas parcourues, et les sommets auxquels elles sont reliées. Cela forme une union de k graphes connexes, G1, ..., Gk, dont tous les sommets sont reliés à un nombre pair d'arêtes. Pour chaque graphe Gi, il existe un chemin Li passant une fois exactement par chaque arête de Gi, et revenant à son point de départ. (5)
Maintenant revenons à notre parcours initial L. Il coupe chaque graphe Gi en un sommet xi (puisque le graphe de départ est connexe). Regardons le parcours suivant:
Je pars de a, et je suis le chemin L jusqu'à x1 ; je suis le chemin L1 de x1 à x1 ; je suis le chemin L de x1 jusqu'à x2 ; je suis le chemin L2 de x2 à x2 ; etc.
Je suis le chemin Lk de xk à xk ;
Je suis le chemin L de xk à a (ou b selon le cas).
En d'autres termes, je suis le chemin L que j'avais emprunté au départ, mais à chaque fois que je passe par un sommet xi, je fais la boucle Li, puis je reprends mon chemin.
Le chemin ainsi construit fonctionne.

Exemple :



1 – 2 puis 2 – A – B – C – D – E – 1 – F – G – H – 2 puis 2 – 3 puis 3 – B – I – E – 3 puis 3 – 1. (6)

Notes d'édition

(1) Pour que le critère soit suffisant, il faut ajouter l'hypothèse que le réseau est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant.

(2) Pour montrer que le critère est nécessaire, les auteur·e·s supposent qu'il existe un parcours qui passe par toutes les villes exactement une fois. La preuve de ce point est un peu floue mais leur argument principal est : lorsque l'on traverse une ville, on utilise deux routes, une pour arriver et une pour repartir.

(3) Ici les auteur·e·s font un raisonnement par récurrence. Ils ne font pas l'initialisation mais celle-ci est assez facile. Le lecteur, la lectrice est d'ailleurs invité·e à vérifier que le critère fonctionne bien sur des réseaux avec une, deux ou même trois villes.

(4) En effet, si on ne peut pas continuer cela veut dire que l'on est en b (ou en a selon le cas) car, en arrivant dans une ville, autre que a, on a forcément utilisé un nombre impair de routes partant de cette ville. C'est ici l'argument clé.

(5) Les auteur·e·s font ici appel à l'hypothèse de récurrence.

(6) Cet exemple illustre la démonstration présentée juste au-dessus. Le parcours 1-2-3-1 correspond au parcours initial L et les parcours rouge/rose et vert aux parcours L1 et L2 dans les graphes G1 et G2.