Le téléphone magique

par
Zoé MERCERON, Elofie DORSO, Manon AOUSTIN et Thomas BEAUVINEAU
élèves de 6ème.

2014-2015

Collège de l'Evre, Montrevault (Maine-et-Loire)

Enseignants : Mme RAVELEAU-PICOULET, M. RAVELEAU, M. ALLOSCHERY
Chercheur : Thomas WALLEZ (Université de Nantes)

Présentation de notre sujet :

Les téléphones ont une propriété un peu magique. Cela concerne leurs touches de 1 à 9.
Choisissez un chiffre par ligne de façon à ce qu'aucun des ces chiffres ne soit dans la même colonne qu'un autre choisi. Additionnez ces chiffres et notez le résultat. Recommencez avec trois autres chiffres.
Qu'observez-vous ? Pourquoi ?
A-t-on le même phénomène avec un clavier 4x4 à 16 touches ? Et pour un clavier nxn ?

Résultats obtenus :

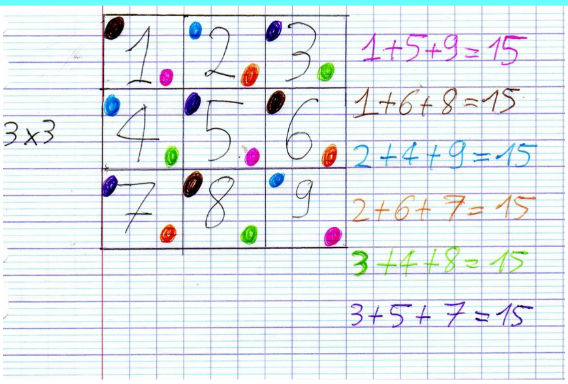
*Pour un 3x3 la somme est constante, elle est toujours égale à 15. (Il y a 6 possibilités.)
*Pour un 4x4 la somme est constante, elle est toujours égale à 34. (Il y a 24 possibilités.)
*Pour un 5x5 la somme est constante, elle est toujours égale à 34. (Il y a 120 possibilités.)
*Pour un nxn (« n'importe quelle taille ») la somme dépend uniquement de la taille du clavier :
il y a n! possibilités qui donnent toutes le même résultat.

Résultats obtenus suite au congrès, grâce aux questions posées pendant l'exposé :

*Pour un nxn, on peut connaître la valeur de cette somme.

Démonstration des résultats :

Pour un 3x3



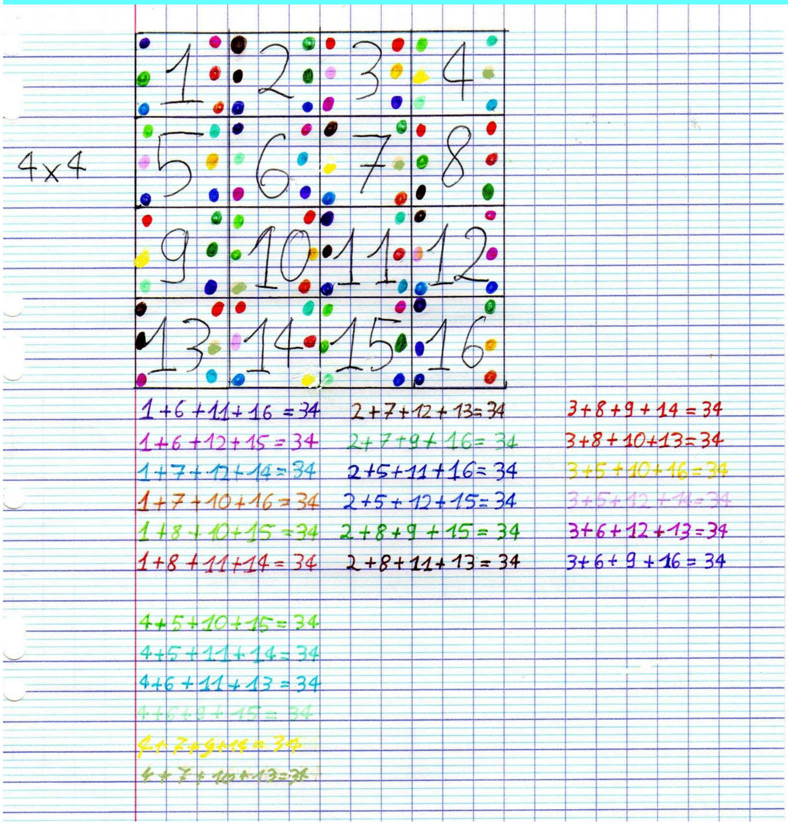
brouillon du 3x3 :

Nous avons fait plein de brouillons et nous avons remarqué que le résultat atteint toujours 15.

Il y a 6 possibilités en tout :
Il y a 3 possibilités pour la 1ère ligne. (On peut choisir le 1, le 2 ou le 3.)
Il ne reste plus que 2 possibilités sur la 2ème ligne. (car une colonne est déjà prise.)
Il ne reste plus qu'un seul choix possible sur la dernière ligne. (Car il ne reste qu'une colonne)
Il y a 3x2x1 = 6 possibilités.

Nous avons testé toutes les possibilités, le résultat est toujours 15.

Pour un 4x4



Brouillon du 4x4 [1]

Nous avons testé les 24 possibilités du clavier 4x4, la somme est toujours égale à 34.

Il y a 24 possibilités car on a :
4 choix pour la première ligne, 3 pour la deuxième ligne, 2 pour la troisième ligne et 1 pour la quatrième ligne. 4x3x2x1 = 24 (Voir liste du brouillon.)

Pour un 5x5 (et plus)

Nous avons remarqué que nous pouvions connaître le nombre de possibilités.
Pour le 5x5, il y en a 5x4x3x2x1 = 120. Nous les avons toutes testées, cela fait toujours 65.

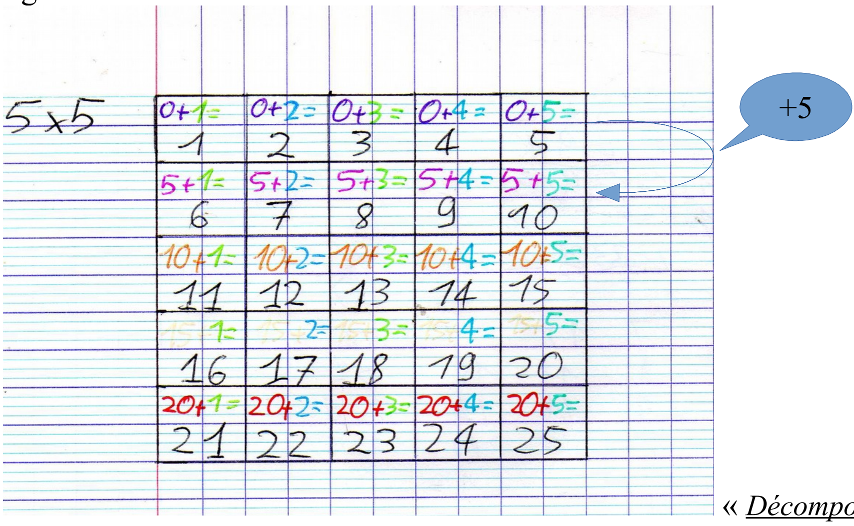
Le nombre de possibilités augmente très vite et essayer 120 calculs était déjà très long.

On peut connaître le nombre de possibilités pour un clavier NxN, c'est Nx(N-1)x...x2x1.
Nos professeurs nous ont appris que cela se note N!
Pour un 10x10, il y a 10 ! = 10x9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 3 628 800 possibilités.

On ne peut pas tout essayer, il faut trouver une autre méthode. [2]

Seconde méthode : en observant les touches du clavier.

À force de dessiner les claviers nous avons remarqué que le nombre sur une touche dépend de sa ligne et de sa colonne :



« *Décomposition des touches » d'un clavier 5x5*

(Dans un 5x5, on passe d'une ligne à celle d'en dessous en ajoutant 5 parce qu'il y a 5 touches par ligne.)

Pourquoi la somme est-elle toujours constante ?

	+1	+2	+3
+0	0+1 1	0+2 2	0+3 3
+3	3+1 4	3+2 5	3+3 6
+6	6+1 7	6+2 8	6+3 9

Il y a toujours 1 dans la 1ère colonne,
Il y a toujours 2 dans la 2ème colonne,
Il y a toujours 3 dans la 3ème colonne.

Il y a toujours +0 sur la 1ère ligne,
Il y a toujours +3 sur la 2ème ligne,
Il y a toujours +6 sur la 3ème ligne.
[3]

Comme il faut obligatoirement choisir une touche dans chaque colonne et sur chaque ligne, on aura toujours :

pour un 3x3 : $1 + 2 + 3 + 0 + 3 + 6 = 15$

pour un 4x4 : $1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 4 + 8 + 12 = 34$

…

pour un nxn : $(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (0 + n + 2 \times n + 3 \times n + \ldots + (n-1) \times n)$

Combien vaut cette somme ?

* Si on connaît la taille du clavier, on peut utiliser la formule ci-dessus pour trouver la valeur de la somme.

* Si le nombre de lignes et de colonnes est un nombre impair, le clavier a une touche centrale :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Clavier à 3 lignes/colonnes

la somme est égale à 15

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Clavier à 5 lignes/colonnes

la somme est égale à 65.

On peut connaître la valeur de la somme en multipliant le nombre sur la touche centrale par la taille du clavier. [4] [5]

Notes d'éditions

[1] L'édition regrette l'usage du feutre jaune, qui rend certaines lignes illisibles.
[2] Il faudrait préciser la question que l'on se pose ici : il s'agit de calculer la somme des nombres choisis sur le clavier, pour chacune des « possibilités ».
[3] Les valeurs numériques dans cette remarque ne sont valables que pour un clavier 3*3.
[4] Cette affirmation ne peut être ici qu'une conjecture.
[5] En se plaçant au niveau du programme de la classe de troisième, on peut utiliser l'explication de la constance de la somme, donnée plus haut, pour expliciter la valeur de cette case centrale, dans le cas n*n avec n impair :

- quel est le numéro de la ligne centrale (et donc aussi de la colonne centrale) ?
  Le nombre de lignes au-dessus est 1/2 * (n-1). La ligne centrale est la suivante, donc elle porte le numéro 1/2 * (n-1) + 1.
- On a vu plus haut que la valeur de la case se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est : (i-1)*n + j. Cela donne ici, pour la case centrale :

$1/2 * (n-1)*n + 1/2 * (n-1) + 1 = 1/2 * (n-1)*(n+1) + 1 = 1/2 * (n^2-1) + 1 = \boxed{1/2 * (n^2+1)}$