

Le puzzle qui rend fou

Année 2016 – 2017

Yann DEMANGE, élève de 6^{ème}

Alix ZUCCHI, Heddie CHAMANT, Paul Loup BARGOIN, élèves de 5^{ème}

Achille THEILLIOL, Amélie BRAYDA, Gabriel CARTERET, Gwendal DRU, Thomas WOLTRAGER, élèves de 3^{ème}

Encadrés par HIRIART Louissette, FINDIK Ziya

Établissements : Collège George CHEPFER de VILLERS lès NANCY

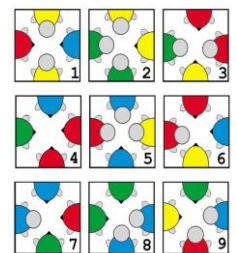
Chercheuse : Irène MARCOVICI, IECL.

1. Présentation du sujet

Voici un puzzle composé de 9 pièces carrées, qu'il s'agit d'assembler pour former un carré en respectant les couleurs et les formes des tortues : on ne peut pas assembler deux têtes ou deux queues de tortues et une tortue a une seule couleur.

Cela semble tout simple, et pourtant, ce puzzle est redoutablement difficile!

Le but du sujet est de mieux comprendre pourquoi.



2. Sommaire

Première partie : Etude du puzzle donné par notre chercheuse

- Combien de manières différentes de former un carré avec les 9 pièces si dans un premier temps, on ne cherche pas à respecter les couleurs ni même les formes des tortues ?
- Résolution du puzzle comme pourrait le faire un ordinateur.
- Temps de résolution complète de ce puzzle ?
- Si on oublie les couleurs des tortues et qu'on essaie juste de former un carré qui respecte les formes des tortues, le puzzle est-il plus facile ?

Deuxième partie : Etude de puzzles constitués d'un seul type de pièces

- Il n'y a que 6 types de pièces différentes.
- Si on prend 9 exemplaires du même type de pièces, peut-on toujours les agencer pour résoudre un puzzle ?
- Puzzles avec 4 couleurs et constitués de pièces avec 2 têtes sur des arêtes consécutives et 2 queues comme ceux du commerce.

Première partie : Etude du puzzle donné par notre chercheuse

1°) Combien de manières différentes de former un carré avec les 9 pièces si dans un premier temps, on ne cherche pas à respecter les couleurs ni même les formes des tortues ?

On a 9 cases possibles pour placer une première pièce et on peut en tournant la pièce de quarts de tours, la placer de 4 manières différentes.

▪ Cela donne 9×4 possibilités pour la 1^{ère} pièce.

Il reste 8 cases possibles pour placer une deuxième pièce et on peut par des rotations de quarts de tours, la placer de 4 manières différentes.

▪ Cela donne 8×4 possibilités pour la 2^{ème} pièce.

Et ainsi de suite, jusqu'à la dernière pièce que l'on ne pourra placer que dans la case restante, mais on pourra par des rotations de quarts de tours la placer de 4 manières.

▪ Donc en tout :

$(9 \times 4) \times (8 \times 4) \times (7 \times 4) \times (6 \times 4) \times (5 \times 4) \times (4 \times 4) \times (3 \times 4) \times (2 \times 4) \times (1 \times 4)$ possibilités de placer les 9 pièces.

▪ Mais en fait, il y a 4 fois moins de manières différentes de former un carré avec les 9 pièces, car pour chaque possibilité, si on tourne le plateau tout entier du puzzle de 1, 2 ou 3 quarts de tour on retrouve une possibilité déjà trouvée.

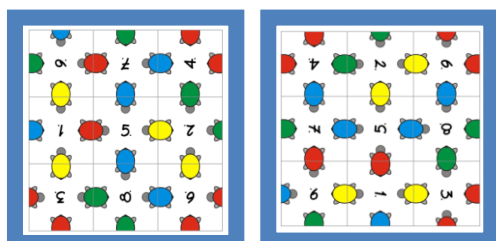
Il y a donc $[(9 \times 4) \times (8 \times 4) \times (7 \times 4) \times (6 \times 4) \times (5 \times 4) \times (4 \times 4) \times (3 \times 4) \times (2 \times 4) \times (1 \times 4)] / 4$ manières différentes de former un carré avec les 9 pièces si on ne tient compte ni des formes, ni des couleurs, c'est-à-dire **23 781 703 680 manières différentes**.

C'est énorme et cela nous décourage un peu.

On se lance alors avec courage dans la recherche d'une solution par groupe de 2 élèves.

2°) Etude du puzzle donné par notre chercheuse. Algorithme de résolution.

Au bout d'une heure, 2 groupes ont trouvé chacun une solution.



En fait, il s'agit de la même solution, il suffit de tourner le plateau d'un quart de tour.

Mais nous n'avons pas résolu le puzzle en entier, notre chercheuse nous dit qu'il y a au moins deux solutions !

Nous adoptons alors un algorithme « en escargot » pour placer méthodiquement les pièces, comme pourrait le faire un ordinateur.

Nos pièces sont numérotées de 1 à 9, si cela n'avait pas été le cas, il aurait fallu commencer par le faire.

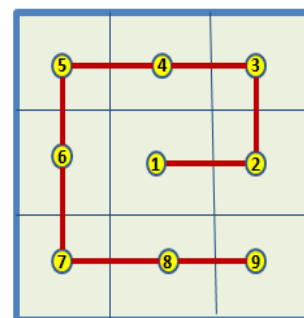
On choisit de placer une première pièce au centre du puzzle, elle ne subira aucune rotation car une rotation de la pièce centrale correspond à une rotation du plateau du puzzle. On commence chronologiquement par la pièce 1, puis la 2, la 3, etc. jusqu'à la pièce 9.

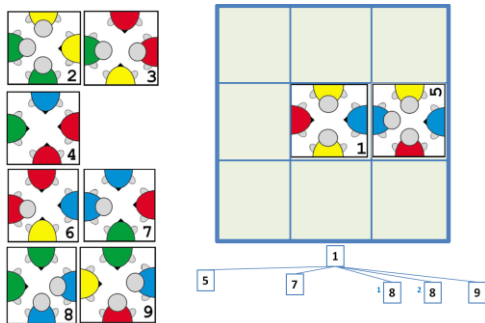
On place alors les autres pièces au fur et à mesure en escargot comme sur la figure, en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Ainsi, la case centrale sera la position ① d'une pièce, à sa droite la position ②, etc.

On placera les pièces en commençant toujours par les numéros de pièces les plus petits et en continuant dans l'ordre croissant.

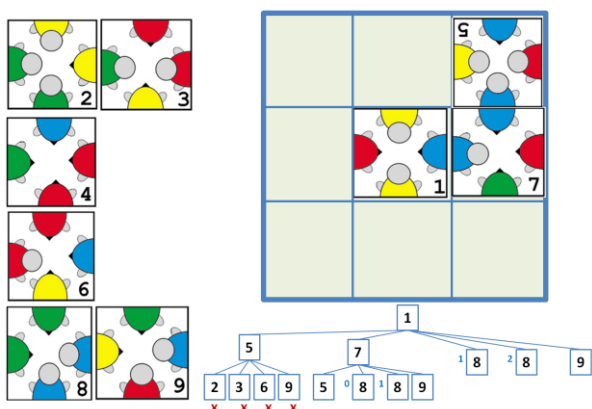
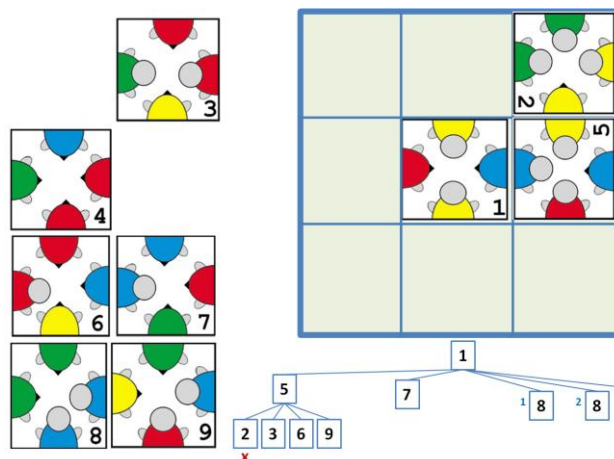
Au fur et à mesure, nous construisons un arbre des possibilités pour placer les pièces.



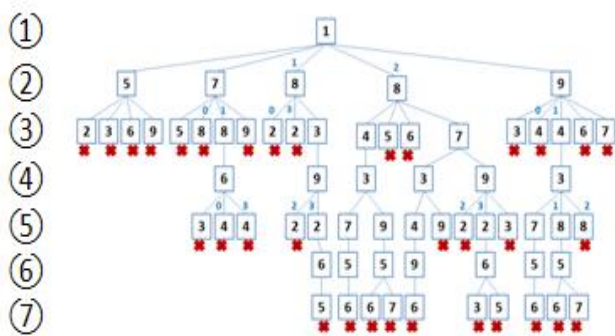


- Nous commençons par placer la pièce 1 en position ① au centre du puzzle. A la queue bleue, il faut associer une tête bleue.
 - En position ② à droite, nous avons le choix entre les pièces 5, 7, 8 de deux manières différentes (1 en tournant la pièce d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre, 2 en tournant la pièce d'un demi tour) et de la pièce 9. Ensuite, il faut associer une queue jaune à la tête jaune.
- Nous commençons en parallèle l'arbre de résolution comme sur la figure ci-contre.

- En position ③ dans le coin supérieur droit, nous avons le choix entre les pièces 2, 3, 6 et 9. On complète l'arbre. On place la pièce 2. En position ④, aucune pièce restante ne convient. On revient en arrière. On place la pièce 3 en position ③, aucune pièce restante ne convient. On revient en arrière. De même, avec la pièce 6 puis la pièce 9 en position ③.
- Nous revenons alors en arrière, la pièce 5 en position ② ne nous permet pas de continuer à placer des pièces. Nous plaçons alors la pièce suivante 7 en position ②.



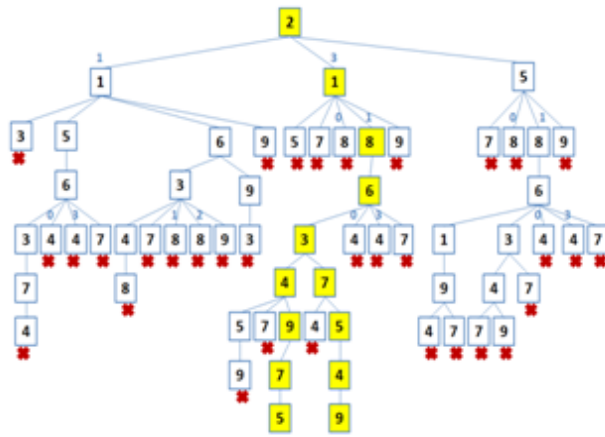
- A la queue bleue de la pièce 7, il faut associer une tête bleue. En position ③, nous avons donc le choix entre les pièces 5, 8 de deux manières différentes (0 en ne tournant pas la pièce, 1 en tournant la pièce d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre) et de la pièce 9. Nous complétons l'arbre.
- Nous continuons ainsi de suite.



Avec la pièce 1 au centre du puzzle, nous obtenons l'arbre ci-contre et nous avons trouvé que nous ne pouvons jamais placer plus de 7 pièces du puzzle.
Une solution du puzzle ne pourra donc pas avoir la pièce 1 en son centre.

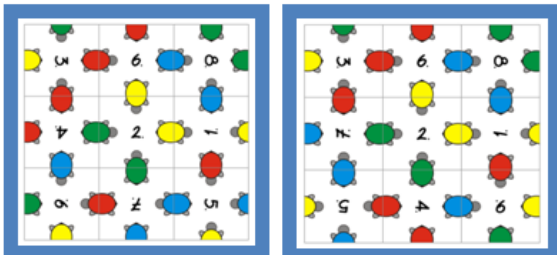
Nous avons alors placé successivement les pièces 2, 3, ..., 8 et 9 au centre du puzzle et obtenu les arbres suivants :

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤
- ⑥
- ⑦
- ⑧
- ⑨

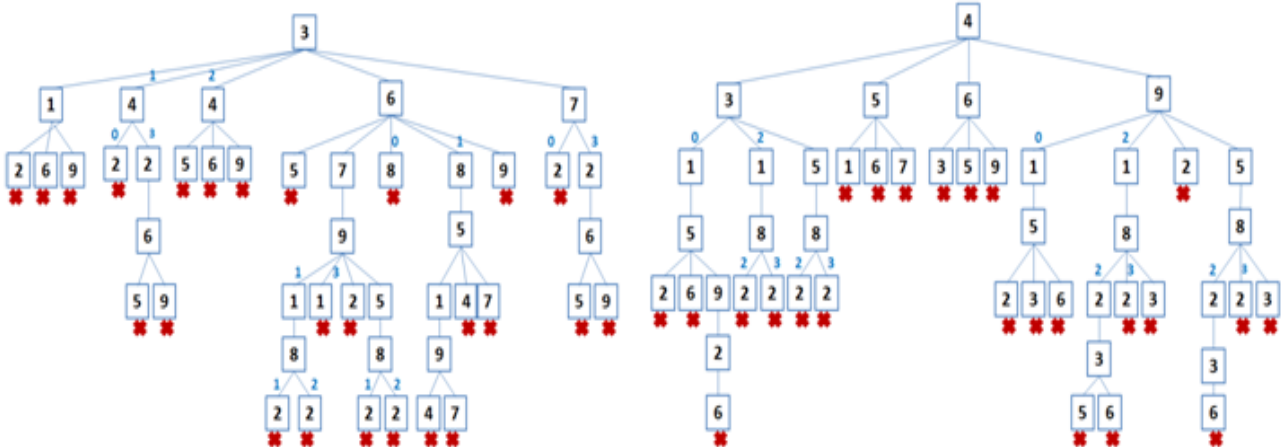


Avec la pièce 2 au centre du puzzle, de deux manières, nous pouvons placer les 9 pièces du puzzle.

Le puzzle a donc deux solutions avec la pièce 2 en son centre.

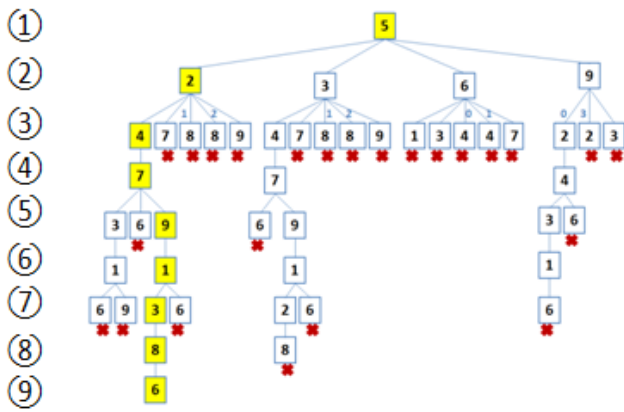


Les deux solutions de l'arbre ci-dessus, avec la pièce 2 au centre du puzzle



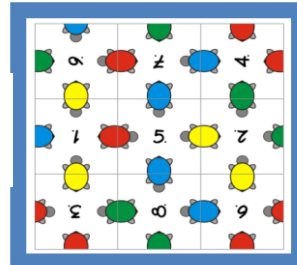
Avec les pièces 3 et 4 au centre du puzzle, nous ne pouvons jamais placer plus de 7 pièces.

Une solution du puzzle ne pourra donc pas avoir la pièce 3 ou la pièce 4 en son centre.

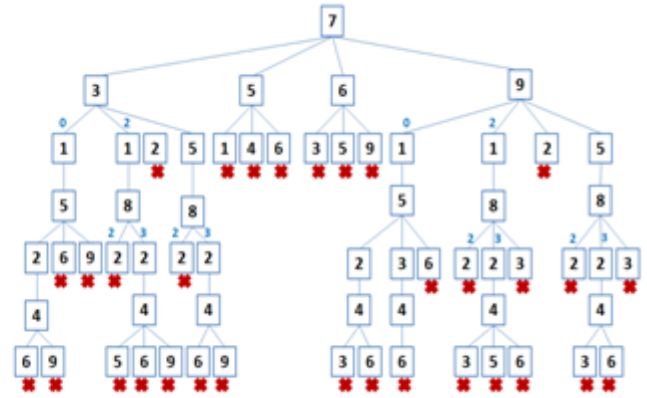
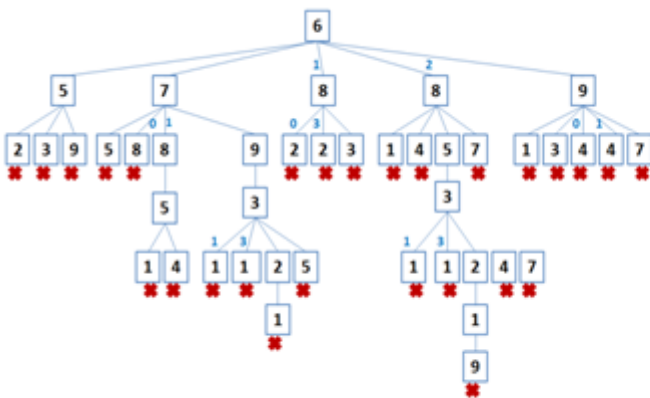


Avec la pièce 5 au centre du puzzle, nous pouvons une fois placer les 9 pièces du puzzle.

Le puzzle a donc une solution avec la pièce 5 en son centre.

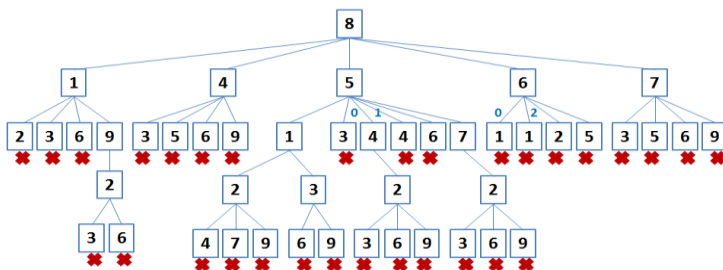


La solution du puzzle avec la pièce 5 en son centre.



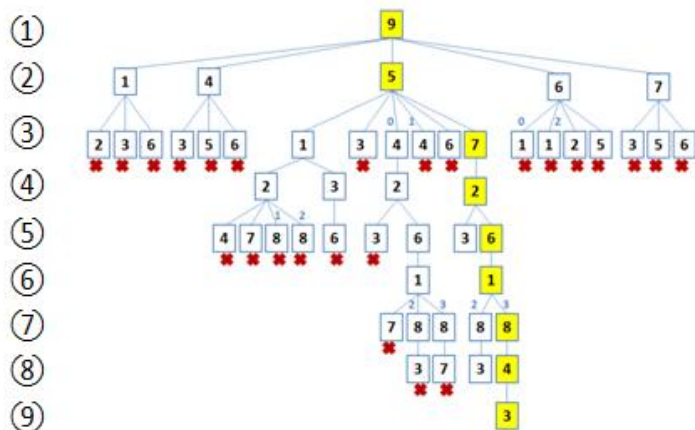
Avec les pièces 6 et 7 au centre du puzzle, nous ne pouvons jamais placer plus de 7 pièces.

Une solution du puzzle ne pourra donc pas avoir la pièce 6 ou la pièce 7 en son centre.



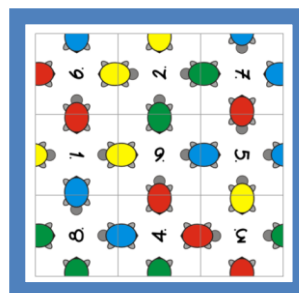
Avec la pièce 8 au centre du puzzle, nous ne pouvons jamais placer plus de 5 pièces.

Une solution du puzzle ne pourra donc pas avoir la pièce 8 en son centre.



La solution du puzzle avec la pièce 9 en son centre.

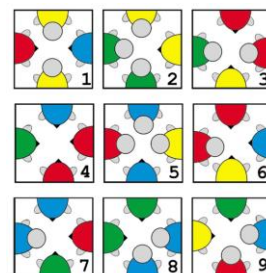
Avec la pièce 9 au centre du puzzle, nous pouvons une fois placer les 9 pièces du puzzle.
Le puzzle a donc une solution avec la pièce 9 en son centre.



Ainsi, nous pouvons affirmer que notre puzzle a donc exactement 4 solutions.

Nous avons aussi étudié la composition du puzzle

Il y a : **4 têtes rouges** **5 têtes bleues** **3 têtes vertes** **4 têtes jaunes**
6 queues rouges **5 queues bleues** **5 queues vertes** **4 queues jaunes**



En conséquence, nous pouvons en conclure que :

- En faisant la différence entre les têtes et les queues rouges, il reste 2 queues rouges sans têtes. Il y aura donc **au moins 2 queues rouges sur les bords du puzzle**. De même, il y aura **au moins 2 queues vertes sur les bords du puzzle**.
- Il y a 16 têtes et 20 queues en tout. A l'intérieur du puzzle, on doit reconstituer 12 tortues. Il restera donc **4 têtes et 8 queues sur les bords du puzzle**.
- Par couleur, en prenant le minimum entre le nombre de têtes et de queues, on a :
4 tortues rouges + 5 tortues bleues + 3 tortues vertes + 4 tortues jaunes = 16 tortues
Il y aura 12 tortues constituées au centre du puzzle, donc sur les bords, il restera **4 fois une tête avec une queue d'une même couleur**.

Remarque : Si cette somme était inférieure à 12 tortues, le puzzle serait impossible, on ne pourrait pas former 12 tortues sur les arêtes à l'intérieur du puzzle.

Finalement, sur les bords du puzzle, il y aura **2 queues rouges, 2 queues vertes et 4 fois une tête et une queue d'une même couleur**. Sur les 4 solutions trouvées, nous retrouvons cette particularité.

Au cours de l'année, sur internet, nous avons trouvé le site « **Crazy Turtle Puzzle Editor** », un site où l'on peut éditer des puzzles fous et qui les résout. Nous éditons alors notre puzzle et nous retrouvons les 4 solutions. Ce site nous a permis d'illustrer cet article et notre présentation au congrès de Liège.

3°) Durée de résolution complète du puzzle avec toutes les solutions ?

Il nous a fallu 461 manipulations de pièces pour résoudre ce puzzle.

Nous comptons 20'' par manipulation de pièce et de construction de l'arbre en parallèle.

$461 \times 20s = 9\,220s = 153min\,40s = 2h\,33min\,40s$

En environ 2h 35min, le puzzle est entièrement résolu.

Nous pensons donc que ce puzzle n'est pas redoutablement difficile, il suffit de patience et de méthode pour trouver les 4 solutions et affirmer qu'il n'y en a pas d'autres.

4°) Si on oublie les couleurs des tortues et qu'on essaie juste de former un carré qui respecte les formes des tortues, le puzzle est-il plus facile ?

Nous éditons sur « **Crazy Turtle Puzzle Editor** » le même puzzle, mais ne comportant qu'une seule couleur. Il y a tellement de solutions que le logiciel plante avant de donner les solutions.

Nous avons trouvé que quelque soit la pièce placée au centre du puzzle, il y a plusieurs solutions à chaque fois.

L'arbre de résolution peut comporter à partir d'un point, jusqu'à 19 branches (par exemple lorsque la pièce 5 qui ne comporte qu'une queue sur un de ses côtés, est au centre du puzzle, il y a le choix entre 19 queues restantes pour la pièce suivante puisqu'il y a 20 queues en tout).

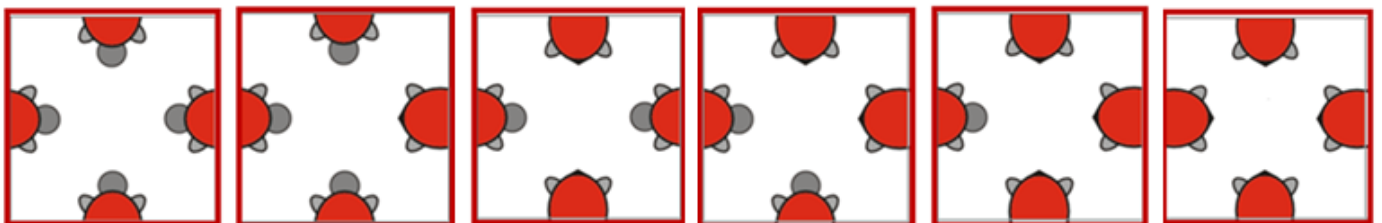
Il est donc extrêmement facile de trouver une solution du puzzle ayant une seule couleur, on y arrive en 1 à 3 minutes. On a vraiment essayé et ce puzzle a fait l'objet d'un défi sur notre stand lors du congrès de Liège.

Deuxième partie : Etude de puzzles ne comportant qu'un seul type de pièces.

Un type de pièces est une pièce qui comporte les mêmes figures placées de la même manière, on ne tient pas compte des couleurs

1°) Il n'y a que 6 types de pièces différentes

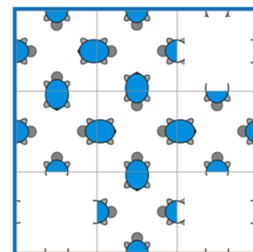
Celui avec 4 têtes, celui avec 3 têtes et 1 queue, celui avec 2 têtes sur des côtés opposés et 2 queues, celui avec 2 têtes sur des côtés consécutifs et 2 queues, celui avec 1 tête et 3 queues et enfin celui avec 4 queues.



2°) Si on prend 9 exemplaires du même type de pièces, peut-on toujours les agencer pour résoudre un puzzle ?

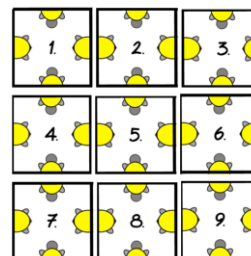
Avant d'étudier ces puzzles avec les 4 couleurs, nous commençons par étudier des puzzles avec une seule couleur.

- Si on prend 9 pièces avec 4 têtes (ou bien 9 pièces avec 4 queues), on ne pourra assembler aucune pièce pour former des tortues. Un tel puzzle n'a pas de sens.
- Si on prend 9 pièces avec 3 têtes et une queue, on ne pourra jamais terminer le puzzle. Pour terminer, il faudrait des pièces avec 2 queues !
- Il en est de même si on prend 9 pièces avec 3 queues et une tête, on ne peut terminer le puzzle. Il manquera des pièces avec 2 têtes.



Si on ne peut pas résoudre ces puzzles avec une seule couleur, on ne pourra pas avec les 4 couleurs.

▪ Si on prend 9 pièces avec 2 têtes sur des arêtes opposées et 2 queues, le puzzle devient extrêmement enfantin s'il n'y a qu'une seule couleur. En formant des tortues, on peut prendre les pièces dans n'importe quel ordre, on arrivera toujours à placer les 9 pièces.



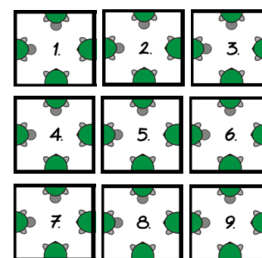
Il y a exactement 92 897 280 façons différentes de placer les 9 pièces du puzzle.

En effet, en position ①, on peut placer n'importe laquelle des 9 pièces. On ne lui fait subir aucune rotation. En position ②, on a le choix entre les 8 pièces restantes. Il n'y a une contrainte que sur un seul côté. Chaque pièce peut alors être placée de 2 manières différentes en lui faisant subir un demi-tour. Par exemple, si pour former une tortue, il faut une tête, comme il y a 2 têtes sur des côtés opposés, il y a 2 manières de placer la pièce. En position ③, c'est comme en position ② avec les 7 pièces restantes. En position ④, on a le choix entre les 6 pièces restantes. Mais, il y a une contrainte sur deux côtés consécutifs. Chaque pièce peut encore être placée de 2 manières différentes en lui faisant subir un demi-tour. En effet, il faut pour placer une pièce, deux figures différentes sur deux côtés consécutifs, ce qui est le cas de 2 manières en faisant subir à la pièce un demi-tour. En position ⑤, c'est comme en position ② avec les 5 pièces restantes. En position ⑥, c'est comme en position ④ avec les 4 pièces restantes. En position ⑦, c'est comme en position ② avec les 3 pièces restantes. En position ⑧, c'est comme en position ④ avec les 2 pièces restantes. En position ⑨, c'est aussi comme en position ④ avec la pièce restante.

Cela nous donne

$9 \times (8 \times 2) \times (7 \times 2) \times (6 \times 2) \times (5 \times 2) \times (4 \times 2) \times (3 \times 2) \times (2 \times 2) \times (1 \times 2)$ façons différentes de placer les 9 pièces du puzzle, soit 92 897 280 façons.

▪ Si on prend 9 pièces avec 2 têtes sur des arêtes consécutives et 2 queues, le puzzle reste enfantin s'il n'y a qu'une seule couleur. Comme pour le cas précédent, en formant des tortues, on peut prendre les pièces dans n'importe quel ordre, on arrivera toujours à placer les 9 pièces.



Il y a exactement 5 806 080 façons différentes de placer les 9 pièces du puzzle.

En effet, en position ①, on peut placer n'importe laquelle des 9 pièces. On ne lui fait subir aucune rotation. En position ②, on a le choix entre les 8 pièces restantes. Il n'y a une contrainte que sur un seul côté. Chaque pièce peut alors être placée de 2 manières différentes en lui faisant subir un quart de tour. Par exemple, si pour former une tortue, il faut une tête, comme il y a 2 têtes sur des côtés consécutifs, il y a 2 manières de placer la pièce. En position ③, c'est comme en position ② avec les 7 pièces restantes. En position ④, on a le choix entre les 6 pièces restantes. Mais, il y a une contrainte sur deux côtés consécutifs. Chaque pièce ne peut alors qu'être placée d'une seule manière. Selon les cas, il faudra sur ces deux côtés consécutifs soit 2 têtes, soit 2 queues, soit une tête suivie d'une queue ou encore une queue suivie d'une tête. On trouve ces 4 cas sur chaque pièce de manière unique.

En position ⑤, c'est comme en position ② avec les 5 pièces restantes. En position ⑥, c'est comme en position ④ avec les 4 pièces restantes. En position ⑦, c'est comme en position ② avec les 3 pièces restantes. En position ⑧, c'est comme en position ④ avec les 2 pièces restantes. En position ⑨, c'est aussi comme en position ④ avec la pièce restante.

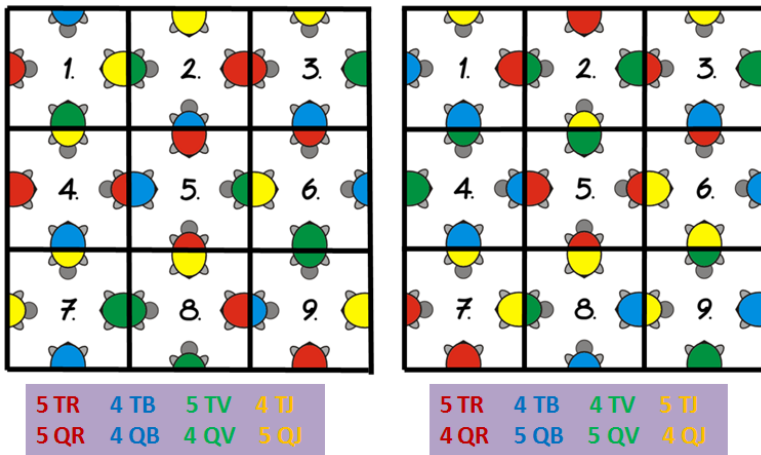
Cela nous donne

$9 \times (8 \times 2) \times (7 \times 2) \times 6 \times (5 \times 2) \times 4 \times (3 \times 2) \times 2 \times 1$ façons différentes de placer les 9 pièces du puzzle, soit 5 806 080 façons.

Avec des pièces avec les 4 couleurs, le puzzle se complique. C'est ce type de puzzle que l'on trouve dans le commerce et que nous étudions à l'aide de « **Crazy Turtle Puzzle Editor** »

3°) Puzzles avec 4 couleurs et constitués de pièces avec 2 têtes sur des arêtes consécutives et 2 queues.

▪ Des puzzles impossibles (on ne peut placer les 9 pièces)

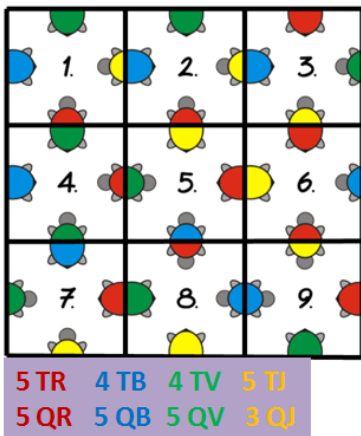


Nous avons trouvé de nombreux puzzles sans solutions.

Pour les deux puzzles ci-contre, on peut former plus de 12 tortues d'une même couleur (respectivement 17 et 16).

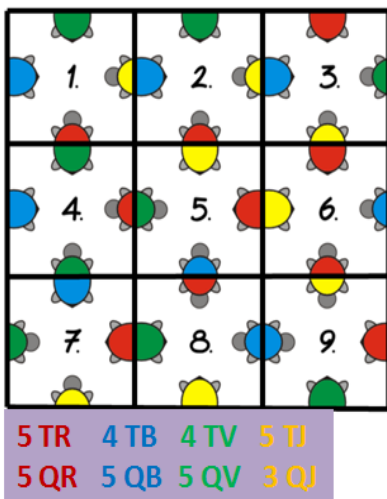
Nous ne savons pas dire pourquoi ces puzzles n'ont pas de solutions.

▪ Des puzzles avec plusieurs solutions

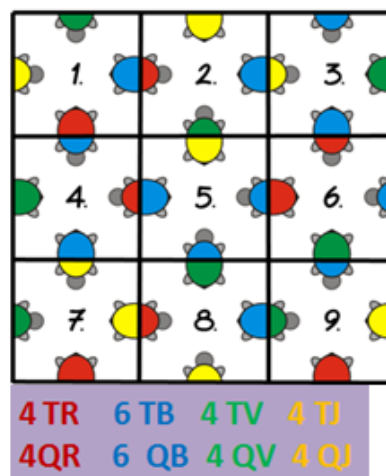


Ce puzzle a 6 solutions différentes.

On peut remarquer que les pièces 1 et 2 sont les mêmes, ce qui explique ce nombre élevé de solutions.



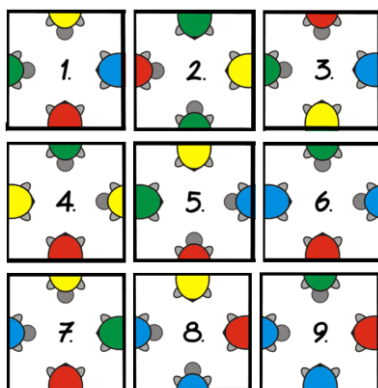
Ce puzzle a 4 solutions différentes.



Ce puzzle a 3 solutions différentes.

▪ Jeu fou du chien du commerce

Nous avons retranscrit ce puzzle sur « Crazy Turtle Puzzle Editor »



Il y a :

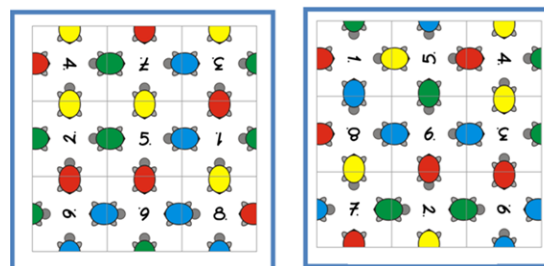
3 têtes rouges 6 têtes bleues 6 têtes vertes 3 têtes jaunes
6 queues rouges 4 queues bleues 3 queues vertes 5 queues jaunes

Par conséquent :

- Il y aura au moins 3 queues rouges, 2 têtes bleues, 3 têtes vertes et 2 queues jaunes sur les bords du puzzle
 - Il y aura 6 têtes et 6 queues sur les bords car en tout il y a 18 têtes et 18 queues.
 - 3 tortues rouges + 4 tortues bleues + 3 tortues vertes + 3 tortues jaunes = 13 tortues
- Donc il restera 1 tête et 1 queue d'une même couleur en plus sur les bords.

Ce puzzle admet deux solutions différentes.

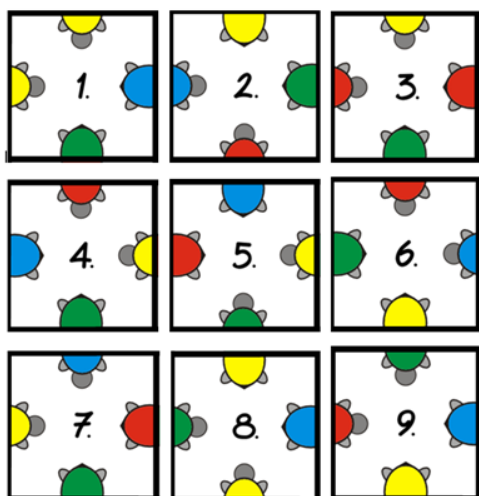
Dans ces deux solutions, on retrouve bien sur les bords du puzzle 3 queues rouges, 2 têtes bleues, 3 têtes vertes et 2 queues jaunes ainsi que 1 tête et 1 queue d'une même couleur en plus.



On a remarqué que ces 2 solutions n'ont pas la même pièce en leur centre, elles sont très différentes.

▪ Puzzle fou des poissons (prêté par notre chercheuse)

Nous avons retranscrit ce puzzle sur « Crazy Turtle Puzzle Editor »



Il y a :

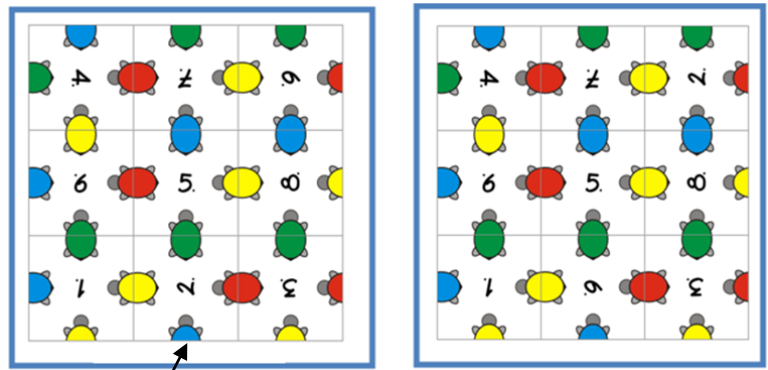
5 têtes rouges 3 têtes bleues 3 têtes vertes 7 têtes jaunes
3 queues rouges 5 queues bleues 6 queues vertes 4 queues jaunes

Par conséquent :

- Il y aura au moins 2 têtes rouges, 2 queues bleues, 3 queues vertes et 3 têtes jaunes sur les bords du puzzle
 - Il y aura 6 têtes et 6 queues sur les bords car en tout il y a 18 têtes et 18 queues.
 - 3 tortues rouges + 4 tortues bleues + 3 tortues vertes + 3 tortues jaunes = 13 tortues
- Donc il restera 1 tête et 1 queue d'une même couleur en plus sur les bords.

Ce puzzle a deux solutions.

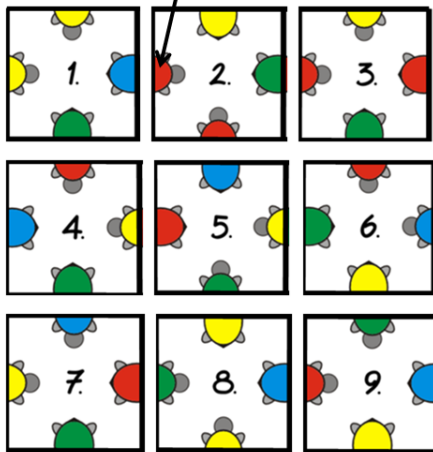
Dans ces deux solutions, on retrouve bien sur les bords du puzzle **2 têtes rouges**, **2 queues bleues**, **3 queues vertes** et **3 têtes jaunes** ainsi que **1 tête et 1 queue d'une même couleur en plus**



On a remarqué que les 2 solutions ont la même pièce au centre du puzzle et alors constaté que les pièces 2 et 6 étaient identiques et interverties dans les 2 solutions.

Nous avons alors remplacé dans le puzzle des poissons **la tête bleue** de la pièce 2 en **une tête rouge** afin de différencier ces deux pièces, nous n'obtenons alors plus qu'une seule solution.

Tête bleue remplacée
par une tête rouge



Dans ce nouveau puzzle ainsi obtenu, il y a :

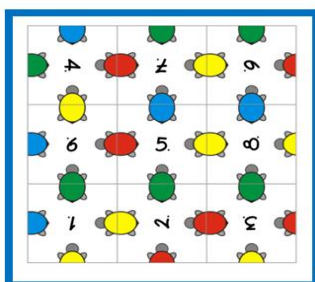
6 têtes rouges **2 têtes bleues** **3 têtes vertes** **7 têtes jaunes**
3 queues rouges **5 queues bleues** **6 queues vertes** **4 queues jaunes**

Par conséquent :

- Il y aura exactement **3 têtes rouges**, **3 queues bleues**, **3 queues vertes** et **3 têtes jaunes** sur les bords du puzzle

- **3 tortues rouges** + **3 tortues bleues** + **3 tortues vertes** + **3 tortues jaunes** = **12 tortues**

Ces 12 tortues se retrouvent au centre du puzzle.



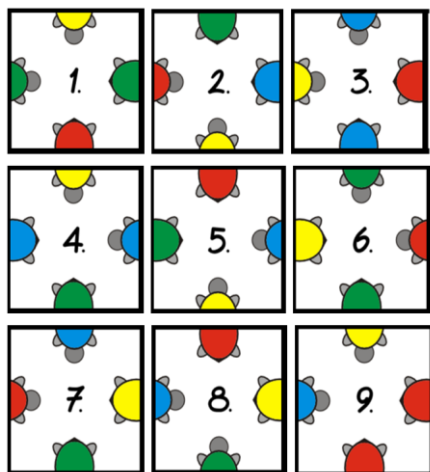
L'unique solution de ce puzzle.

Remarques :

Nous avons tout d'abord remplacé dans le puzzle des poissons **la queue verte** de la pièce 6 par **une queue bleue**, nous avons alors trouvé un puzzle qui avait 3 solutions. Ce n'était pas un bon choix.

On a aussi remplacé dans le puzzle des poissons **la tête bleue** de la pièce 2 par **une tête jaune**, et obtenu un nouveau puzzle avec une unique solution.

▪ Pour conclure nous avons construit un puzzle avec une seule solution.



Il y a :

3 têtes rouges **6 têtes bleues** **3 têtes vertes** **6 têtes jaunes**
6 queues rouges **3 queues bleues** **6 queues vertes** **3 queues jaunes**

Il y a une bonne répartition des couleurs et des figures.

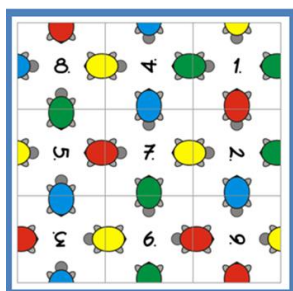
- 9 figures de chaque couleur = 36 figures

- 18 têtes et 18 queues = 36 figures

- Il y aura exactement **3 queues rouges**, **3 têtes bleues**, **3 queues vertes** et **3 têtes jaunes** sur les bords du puzzle

- **3 tortues rouges** + **3 tortues bleues** + **3 tortues vertes** + **3 tortues jaunes** = **12 tortues**

Il y aura **3 tortues de chaque couleur** au centre du puzzle.



L'unique solution avec **3 tortues de chaque couleur** au centre du puzzle et **3 queues rouges**, **3 têtes bleues**, **3 queues vertes** et **3 têtes jaunes** sur les bords du puzzle.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement notre chercheuse Irène Marcovici, pour le choix de ce sujet de recherche et son aide bienveillante tout au long de l'année.

Nous remercions aussi tous ceux qui nous ont permis par leur aide financière, de participer au congrès de Liège :

- la Mairie de Villers lès Nancy
- le Conseil Départemental 54
- le S.I.S. du grand Nancy
- Le rectorat
- L' A.L.P.E et le F.S.E. du collège George Chepfer.

