Le problème du billard

Année 2017-2018

Auteurs : Damien PEYSSARD (3ème), Kylian EURY (3ème)

Encadrés par Mahmoud KHIARI, professeur de Mathématiques

Chercheuse : Marie-Line CHABANOL, Institut de Mathématiques, Université de Bordeaux

Établissement : Collège Max LINDER, Saint-Loubès (Gironde)

L'énoncé

L'énoncé qui nous était donné pour le problème du billard était assez simple : il faut donc l'expliquer simplement.

Un billard est un rectangle. Imaginons que l'on voit ce billard de dessus, et que le coin en bas à gauche n'a pas de trou. On place une boule de billard à cet angle et on la tire de manière à ce qu'elle parte à 45° vers la droite. La boule de billard touche alors le montant opposé à l'angle de départ (1) et repart alors également à 45°, mais cette fois vers le bas. Ainsi, après le premier rebond, la boule aura tracé un chemin comportant un angle droit. Puis, la boule de billard repartira à 45° à chaque fois qu'elle retapera contre un bord du billard, formant alors un angle droit avec le précédent trajet qu'elle aura effectué. Un trajet (ou chemin) de cette boule de billard, est un déplacement rectiligne.

Il faut également savoir qu'il est supposé que les dimensions des côtés du billard sont toujours des valeurs entières.

Le but était donc de répondre à certaines questions : est-ce que la boule finira par retomber dans un coin du billard ? Si oui, selon quel angle ? Au bout de combien de rebonds ?

Les recherches

Pour réaliser nos recherches, nous avons utilisé le logiciel de dessin géométrique GeoGebra. Il nous permettait de dessiner des billards de différentes dimensions, et de tracer également les trajets que la boule de billard effectue. Ainsi, on pouvait tracer tous les trajets qu'effectuait la boule jusqu'à ce qu'elle retombe dans un coin du billard.

Nous avons d'abord tracé des billards de tailles différentes un peu au hasard, en traçant également à l'intérieur de ces billards les trajets qu'effectuait la boule. Nous avons regardé à partir de cela si vous avions des résultats en commun entre les différents billards que nous avions faits et les différents angles d'arrivée. En effet, nous avons trouvé des similitudes dans les résultats, et nous avons donc pu en conclure des conjectures. Nous avons donc pu développer des formules qui nous permettaient d'arriver aux mêmes résultats que nous avions pu observer. Voici ces formules.

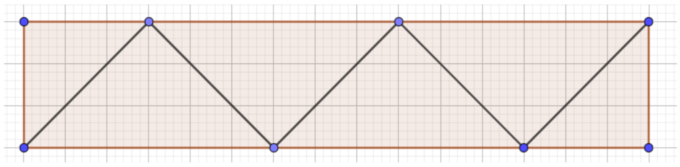
Conjectures et formules pour trouver le nombre de trajets

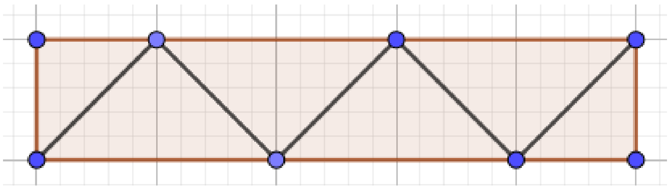
Pour commencer, nous avons constaté que la boule arrivait toujours dans un coin du billard (2).

Nous avons fait un nombre très important de rectangles représentants des billards sur GeoGebra, et nous en sommes arrivés à la conjecture suivante : il est possible de calculer le nombre de trajets qu'effectuera la boule seulement en connaissant les dimensions du billard.

Pour exprimer ces dimensions, nous allons utiliser deux lettres : x, pour désigner la longueur des côtés horizontaux du billard, et y pour désigner la longueur des côtés verticaux du billard (le billard étant toujours représenté par un rectangle).

Tout d'abord, avant de faire tout calcul, il faut commencer par réduire les dimensions du billard au maximum, en gardant les mêmes résultats (même nombre de trajets et de rebonds, même angle d'arrivée). Pour cela, on crée une fraction avec les dimensions du billard, en mettant la plus grande des deux valeurs au numérateur et la plus petite valeur au dénominateur. Par exemple, si x vaut 15 et que y vaut 3, la fraction sera : $15/3$. Seulement, cette fraction peut être réduite en trouvant le plus petit multiple commun du numérateur et du dénominateur : $15/3 = 5$, donc on met 5 au numérateur et $3/3 = 1$, donc on met 1 au dénominateur. Ainsi, les deux nombres composant la fraction sont premiers entre eux.



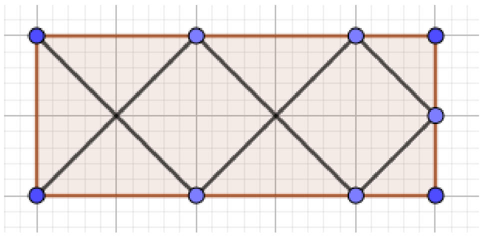


Cela fonctionne sur le principe d'un coefficient de réduction (3). On peut ensuite calculer le nombre de trajets et de rebonds, ainsi que l'angle d'arrivée de la boule, en obtenant le même résultat que si les dimensions avaient été $x = 15$ et $y = 3$. Cette technique est valable pour toutes les fractions réductibles.

Mais pourquoi se fatiguer autant à faire tout ceci ? Eh bien c'est pour se faciliter les calculs d'après et éliminer de nombreuses possibilités d'arrivée assez rapidement.

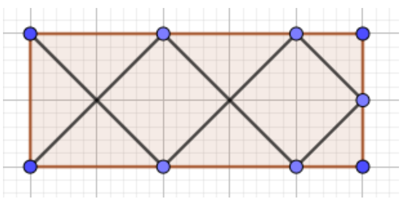
Maintenant, on peut calculer le nombre de trajets qu'effectuera la boule de billard avant de retomber dans un coin.

Dans ce cas-là, on conjecture une formule pour trouver le nombre de trajets qu'effectuera la boule, peu importent les valeurs de x et de y, du moment que ce sont deux entiers naturels. La formule est : $x + y - 1$. Par exemple, si on prend 5 comme valeur de x et 2 comme valeur de y, alors la boule de billard se déplacera 6 fois avant de retomber dans un coin, car $5 + 2 - 1 = 6$. Cela marche pour toutes valeurs de x et de y, vous pouvez vérifier (4) !



Conséquences et nombre de rebonds

En ce qui concerne le nombre de rebonds, on applique toujours la méthode de la fraction irréductible, puis on utilise une méthode simple, si on a calculé le nombre de trajets effectués précédemment : on soustrait 1 au nombre de trajets (ou déplacements) de la boule de billard. Par exemple, nous avons dit précédemment que lorsque $x = 5$ et que $y = 2$, la boule se déplace à 6 reprises. On fait donc $6 - 1 = 5$, et obtient le nombre de rebonds qu'effectue la boule avec un billard de ces dimensions-là.



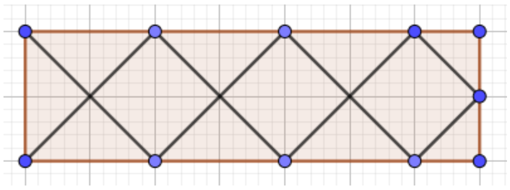
Cette formule s'explique par un fait simple. La boule de billard fait un dernier déplacement qui la mène vers le coin final où elle va arriver. Seulement, elle ne fait pas de rebond à la fin de ce trajet, car son chemin est terminé. Ceci explique la différence de 1 entre le nombre de trajets et le nombre de rebonds.

Conjectures et angles d'arrivée de la boule de billard

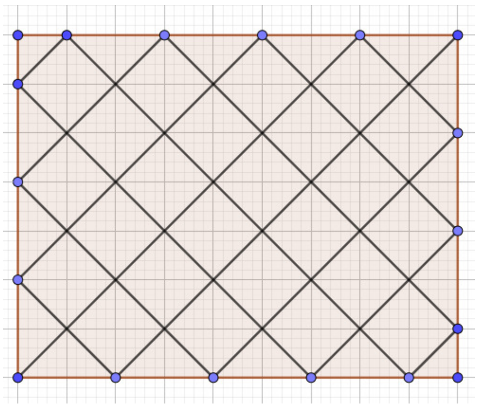
A ce stade là, nous savons que la boule de billard finit toujours par retomber dans un coin du rectangle. Nous savons également calculer combien de déplacements et combien de rebonds la boule effectue en fonction des dimensions du billard. Nous allons maintenant voir les conjectures découvertes qui permettent de savoir dans quel angle du billard arrivera la boule en fonction des valeurs de x et de y.

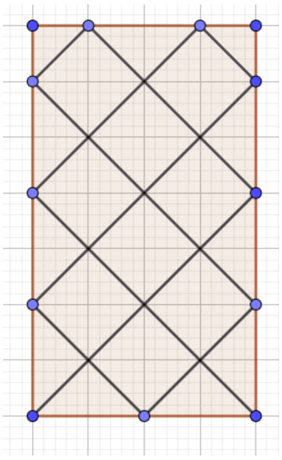
Tout d'abord, on doit effectuer la technique habituelle pour ce problème, qui est de faire une fraction avec les valeurs de x et de y en mettant la plus grande dimension au numérateur. Cela est encore plus utile pour cette partie-là du problème, car il n'existe pas de fraction irréductible composée de nombres entiers naturels ayant des nombres uniquement pairs au numérateur et au dénominateur. Cela s'explique par le fait que si on divise un nombre pair par 2 jusqu'à ce qu'il ne soit plus entier, on finira forcément par tomber, comme dernier nombre entier, sur un nombre impair. Ce constat nous aide beaucoup, car, contrairement à ce que nous avions fait au début, il nous évite de nombreux calculs supplémentaires, ainsi que de nombreuses autres possibilités de coins différents d'arrivée de la boule de billard. Voici donc les conjectures concernant les cas d'arrivée de la boule.

Lorsque x est impair (exemple : 7) et y pair (exemple : 2), alors la boule arrivera forcément dans l'angle en haut à gauche.



Lorsque x et y sont impairs (exemple : 9 et 7), alors la boule arrivera forcément dans l'angle en haut à droite.





Lorsque x est pair (exemple : 4) et y est impair (exemple : 7), alors la boule arrivera forcément dans l'angle en bas à droite.

Remarques

Nous rappelons que toutes ces conjectures ont été testées de très nombreuses fois, sans avoir trouvé jusqu'à présent un exemple de dimensions pour x et y qui ne fonctionnait pas sur le même modèle que ces conjectures. À vous de voir si un tel exemple existe (5) !

Cette présentation touche à sa fin. Nous espérons que vous aurez trouvé nos réponses, ainsi que leurs explications, suffisamment simples et compréhensibles.

Notes d'édition

(1) Il peut s'agir de l'un ou l'autre des deux côtés opposés au coin de départ.

(2) Ce résultat est donc une simple constatation. Le soin de le démontrer est laissé au lecteur.

(3) Cela revient à changer l'unité de longueur (dans l'exemple, la nouvelle unité est égale à trois fois l'ancienne), et cela ne change rien aux trajectoires.

(4) De même que pour la note (1) ce résultat, juste, est une simple constatation expérimentale et le lecteur pourra essayer de le démontrer.

(5) Ou de démontrer les conjectures !