

Voici nos résultats :

Pour des grilles 3x3 c'est à dire 9 personnes, nous avons testé toutes les possibilités (1) et nous sommes arrivés à la conclusion que pour que la mode prenne, il faut donner au moins à 5 personnes. Pas n'importe lesquelles mais 5 personnes.

Notre chercheur nous a fait remarquer que le centre était important et que les angles aussi.

Nous avons alors essayé sur des grilles (toujours carrées) mais de taille plus grande et nous sommes parvenus à faire prendre la mode avec moins de la moitié de cases noires au départ.

Certains d'entre nous on commencé à essayer, comme nous l'avait conseillé le chercheur, sur des grilles rectangulaires.

Nous avons tout d'abord cherché sur notre cahier de brouillon. Nous avons représenté comme le sujet nous le proposait un tableau 3x3 qui représentent les personnes. Certaines cases étaient noires. Elles représentaient les personnes qui suivaient la mode.

Au cours des semaines passées, nous avons pu constater qu'une fois avoir compris les règles, le jeu est très simple:

But du jeu:

Avoir tous les carreaux noirs.

Règles du jeu:

On définit le nombre de carreaux noirs.

Exemple:

Noir a	Noir d	Noir c
Blanc a	Noir b	Blanc b
Blanc c	Blanc d	Blanc e

Ici, le Noir a restera noir : il a trois voisins dont 2 sont noirs ;

le Noir d restera noir : il a 5 voisins dont 3 sont noirs ;

le Noir c restera noir : Il a trois voisins dont 2 sont noirs ;

et ainsi de suite pour les autres :

le Blanc a deviendra noir,

le Noir b deviendra blanc,

le Blanc b deviendra noir,

le Blanc c restera blanc,

le Blanc d restera blanc et le Blanc e restera blanc.

Donc, le tableau sera comme ça:

Noir a	Noir d	Noir c
Noir	Blanc	Noir
Blanc c	Blanc d	Blanc e

Ensuite, nous refaisons la même chose:

le Noir a restera noir, le Noir d restera noir, le Noir c restera noir, le noir en rose redeviendra blanc etc...

Donc le tableau sera comme ça:

Noir a	Noir d	Noir c
Blanc	Noir	Blanc
Blanc c	Blanc d	Blanc e

Le suivant sera :

Noir a	Noir d	Noir c
Noir	Blanc	Noir
Blanc c	Blanc d	Blanc e

C'est le même que l'avant dernier.

Ici, c'est une situation infinie, c'est-à-dire, que les tableaux reviennent à chaque fois une fois l'un, une fois l'autre.

Une autre situation bloquée :

noir	blanc	blanc	noir
noir	blanc	noir	noir
blanc	noir	blanc	noir
blanc	blanc	blanc	noir

blanc	noir	noir	noir
blanc	blanc	noir	noir
blanc	blanc	noir	noir
blanc	blanc	noir	blanc

blanc	blanc	noir	noir
blanc	blanc	noir	noir
blanc	blanc	noir	noir
blanc	blanc	noir	noir

Ce travail de recherche sur papier demandait beaucoup de temps, il fallait refaire les grilles et à chaque fois recommencer à compter pour chaque case.

Nous avons tout de même trouvé une situation neutre qui ne changeait pas au cours du temps, des situations qui se répétaient régulièrement, des cas où la mode prenait aussi. Avec 9 carreaux, nous sommes parvenus à faire prendre la mode avec 5 personnes au minimum qui la suivaient au départ.

Notre professeur nous a montré un logiciel, un tableur, sur lequel, à l'aide de formules, nous pouvions faire calculer à l'ordinateur les différentes étapes.

Tout d'abord, on utilisait « formatage conditionnel » : à la condition d'avoir 1, on mettait une couleur pour l'arrière plan. Ensuite on prenait un tableau dans lequel, on mettait des 0 et des 1. 1 pour ceux qui suivent la mode et 0 pour les autres.

	A	B	C	D
1	1	0	0	1
2	1	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6				

Puis, on a construit un deuxième tableau dessous en écrivant des formules :

B7 =SI(SOMME(A1;A2;B2;C2;C1)>2,5;1;0)

	A	B	C	D
1	1	0	0	1
2	1	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6				
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1
9	1	0	0	0
10	0	1	1	0
11	0	1	1	1
12				

B8 =SI(SOMME(B1;A1;A2;A3;B3;C3;C2;C1)>4;1;SI(SOMME(A1;A2;A3;B3;C3;C2;C1;B1)=4;B2;0))

	A	B	C	D	E	F
1	1	0	0	1		
2	1	1	0	0		
3	0	1	1	1		
4	1	0	0	1		
5	1	0	1	0		
6						
7	1	1	0	0		
8	1	1	1	1		
9	1	0	0	0		
10	0	1	1	0		
11	0	1	1	1		
12						

Pour faire calculer à l'état 2, on fait la somme des valeurs qui sont dans les cases autour

et on regarde si elle est supérieure à la moitié (2). Mme SIMOND nous a aidé pour la syntaxe. Pour celles qui sont au bord, cela ne pose pas de problème car elles ont un nombre impair de voisins, il ne peut pas y avoir égalité (3). Mais pour celles qui sont à l'intérieur, il a fallu rajouter une condition, celle où la somme est égale à la moitié comme ci-dessus (4). L'avantage du tableur c'est qu'une fois que nous avons écrit quelques formules, on peut les recopier et ça nous fait moins de travail que ce qu'on pensait au départ. Sur ce tableau, nous avons écrit les cases marquées d'un x et les autres ont été obtenus par extension.

X	X		X
X	X		X
↓	↓		↓
X	X		X

Une fois que le second tableau est rempli, il nous reste plus qu'à le sélectionner avec une ligne vide en dessous pour garder la séparation entre les différents temps et de recopier le tableau un grand nombre de fois.

Nous voyons alors les différentes étapes et si la mode prend ou pas.

De plus, il nous reste plus qu'à changer le premier tableau et tous les autres changent instantanément.

Voilà des résultats pour lesquels la mode prend :

Départ	Nombre d'étapes																				
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	4								
1	0	1																			
0	1	1																			
1	0	0																			
0	1	1																			
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	6
1	0	0	1																		
1	1	0	0																		
0	1	1	1																		
1	0	0	1																		
1	0	1	0																		
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	6
0	1	0	1																		
1	0	1	0																		
1	0	1	0																		
1	0	1	1																		
1	1	0	0																		

Voici des situations qui se mettent à alterner :

0	1	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	0	0	1

1	1	0	0
1	1	1	1
0	0	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	0	0	0

0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Voici les cas où la mode prends avec 5 : (5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				

(6)

Nous pouvons, grâce à ce logiciel et au formules étudier des tableaux beaucoup plus grands.

Nous commençons par remplir les cases centrales et les angles, puis nous enlevons en

vérifiant que la mode prenait toujours.

Voici quelques exemples : 11 sur 25, puis 16 sur 36 et enfin 23 sur 49

	A	B	C	D	E	F
1	1					1
2		1	1	0		
3		1	1	1		
4		0	1	1		
5	1					1
6						
7	0	1	0	0	0	
8	1	1	1	0	0	
9	0	1	1	1	0	
10	0	0	1	1	1	
11	0	0	0	1	0	
12						
13	1	1	1	0	0	
14	1	1	1	0	0	
15	1	1	1	1	1	
16	0	0	1	1	1	
17	0	0	1	1	1	
18						
19	1	1	1	0	0	
20	1	1	1	1	0	
21	1	1	1	1	1	
22	0	1	1	1	1	
23	0	0	1	1	1	
24						
25	1	1	1	1	0	
26	1	1	1	1	1	
27	1	1	1	1	1	
28	1	1	1	1	1	
29	0	1	1	1	1	
30						
31	1	1	1	1	1	
32	1	1	1	1	1	
33	1	1	1	1	1	
34	1	1	1	1	1	
35	1	1	1	1	1	
36						

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1						1			1						1
2		1	0	1	1					0	1	1	1	0	
3		1	0	1	1					1	1	1	1	1	
4		1	1	0	1					1	0	1	0	1	
5		1	1	0	1					1	1	1	1	1	
6															
7	0	0	0	0	1	0									
8	1	0	0	0	1	1				0	0	0	1	0	0
9	1	0	1	1	1	1				0	0	1	1	1	0
10	1	1	0	0	0	1				1	1	1	1	1	1
11	0	1	0	0	0	0				0	0	1	1	1	0
12															
13	1	1	1	1	0	0				0	0	1	1	1	0
14	1	1	1	1	0	0				0	0	1	1	1	0
15	1	1	1	1	1	1				0	0	1	1	1	0
16	0	0	1	1	1	1				0	0	1	1	1	0
17	0	0	1	1	1	1				0	0	1	1	1	0
18															
19	1	1	1	1	0	0				0	0	1	1	1	0
20	1	1	1	1	1	0				0	0	1	1	1	0
21	1	1	1	1	1	1				0	0	1	1	1	0
22	0	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
23	0	0	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
24															
25	1	1	1	1	1	0				0	0	1	1	1	0
26	1	1	1	1	1	1				0	0	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
29	0	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
30															
31	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
36															

Ce qui nous a interpellé c'est qu'en proportion, les deux premiers sont autour de 0,44 et le dernier proche de 0,47 (7)

Voici nos quelques essais sur les rectangles mais ce ne sont que des essais. Nous avons voulu transposer nos résultats d'observation à ce cas mais nous n'avons pas eu le temps d'aller vraiment plus loin.

D	P	Q	R	S	T	U	V
1							1
	1	1	1	1	1		
1							1
0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	0	1	
0	1	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	

Notes d'édition :

- (1) En toute généralité, chaque case pouvant choisir son état initial indépendamment des autres, il y a $2^9=512$ possibilités de situation initiales pour une grille 3x3. Il est cependant probable qu'à l'aide d'arguments de symétries, on puisse réduire le nombre de situations à regarder pour être exhaustif. Il aurait pu être intéressant pour les auteurs d'explicitier ce point.
- (2) En effet, la somme des cases entourant un cellule donnée donne exactement le nombre de personnes suivant la mode autour de l'individu considéré.
- (3) Cette situation correspond au deuxième schéma de la page précédente. La formule inscrite en haut peut se lire de la manière suivante : Si la somme des cases A1, A2, B2, C1, C2 (cases jouxtant la case B2 d'intérêt) vaut plus que $5/2 = 2,5$, mettre 1, sinon, mettre 0.
- (4) La formule montrée sur la dernière figure de la page précédente peut se lire comme il suit : si la

somme des cases autour de B2 est strictement supérieure à $8/2 = 4$, mettre 1, si elle vaut 4, laisser la valeur précédente, et sinon, mettre 0.

(5) Il n'est pas clair s'il s'agit des seules situations avec 5 personnes suivant la mode au départ qui font que la « mode prend ». Il y a en effet 126 situations possibles (5 parmi 9), et il paraît douteux que les auteurs les aient toutes essayées une à une. A moins qu'ils n'aient utilisé un argument de symétrie pour réduire ce nombre.

(6) La première configuration comporte 6 cases noires, et non 5, comme annoncé.

(7) Les auteurs font probablement référence à la proportion de gens qui suivent la mode (cases noires) dans la situation initiale. Ainsi, dans la première situation, $11/25=0,44$, et 44% des gens suivent la mode dans la situation initiale. Idem pour les secondes et troisièmes situations, avec, respectivement, $16/36 \approx 0,44$ et $23/49 \approx 0,47$.

Ce qui étonne les auteurs est probablement que ces proportions représentent moins de la moitié des personnes présentes à l'état initial. Contrairement au cas d'une grille 3x3, où, d'après ce qui précède, il faut au moins 5 cases noires pour faire partir la mode (soit $5/9 \approx 56\%$), de plus grandes grilles autorisent ce genre de situations, comme annoncé dans l'introduction.