

Le dragon

ANNEE 2013-2014

Noms et Prénoms des élèves, niveaux : FAYE Géraud seconde

Établissements (indiquer la ville et l'établissement jumelé) : Lycée Emile Duclaux (Aurillac)

Enseignant-e-s : Fabrice LALLEMAND

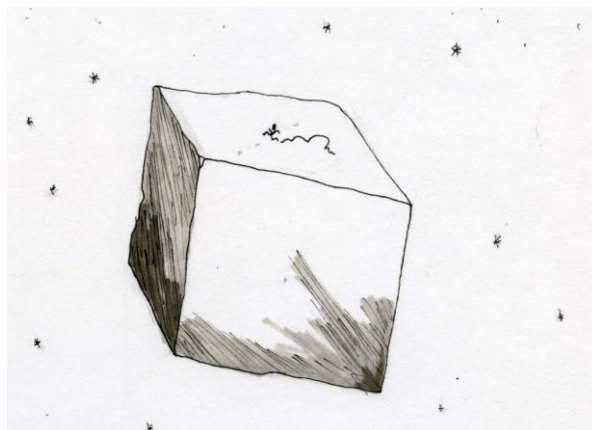
Chercheur: PECASTAING Vincent, Université Paris Sud

Il faut imaginer une planète cubique avec un dragon sur un sommet. Le dragon crache des flammes qui se propagent indéfiniment en ligne droite. Un jour ou le dragon est d'humeur exécrable, il se met à cracher des flammes dans toutes les directions autour de lui. Il y a-t-il une zone sur cette planète qui ne peut pas être atteinte par les flammes ? Le dragon peut-il se brûler avec ses propres flammes.

Pour répondre à ce sujet, nous avons eu plusieurs problèmes :

- Comment représenter le dragon mathématiquement : nous avons choisi de représenter le dragon par le point situé au sommet ou se situe le dragon.
- Comment représenter les flammes sur le cube : nous avons choisi de représenter les flammes par des lignes droites sur le cube
- Comment définir le déplacement d'une flamme en ligne droite.

Nous avons donc émis trois hypothèses sur le déplacement des flammes en ligne droite. **1-**La première est le déplacement des flammes en ligne droite dans l'espace : avec cette hypothèse, certaines zones du cube ne sont pas atteintes et le dragon ne se brûle pas avec ses propres flammes. **2-** La seconde est le déplacement des flammes en ligne droite dans un plan : avec cette hypothèse, les flammes atteignent tous les endroits du cube et le dragon se brûle obligatoirement avec ses flammes. Ce déplacement peut rappeler le déplacement d'une ligne droite sur une sphère. **3-** La dernière hypothèse que nous avons retenue est le déplacement des flammes en ligne droite sur un patron : avec cette hypothèse, les flammes du dragon peuvent atteindre toutes les zones du cube et le dragon peut se brûler avec ses propres flammes.



I – Ligne droite dans l'espace

Pour cette conjecture, la ligne droite est une ligne droite dans l'espace qui ne dévie jamais. Donc quand elle atteint une arête du cube, elle continue en ligne droite dans l'espace (fig.1)

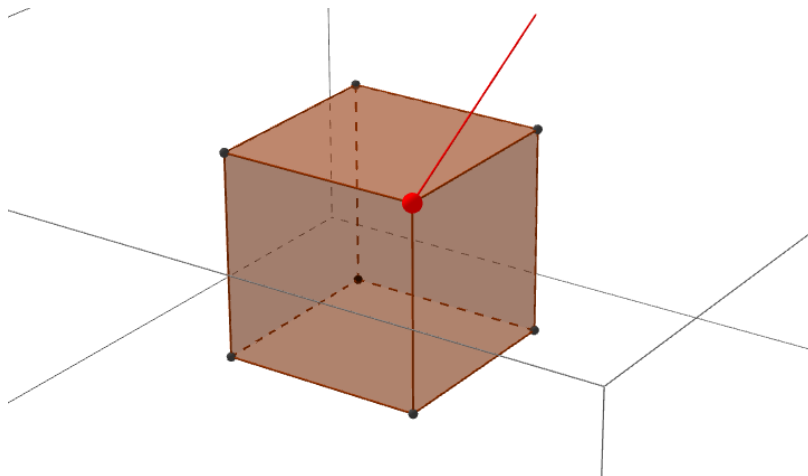


Fig.1 : Une ligne droite dans l'espace

Pour démontrer quelles zones sont atteintes avec ce système de déplacement, nous avons multiplié le nombre de flammes crachées par le dragon, tout en retenant que le dragon crache des flammes dans toutes les directions et donc crache infiniment plus de flammes. Nous avons donc obtenu le résultat illustré par les figures 2 et 3 :

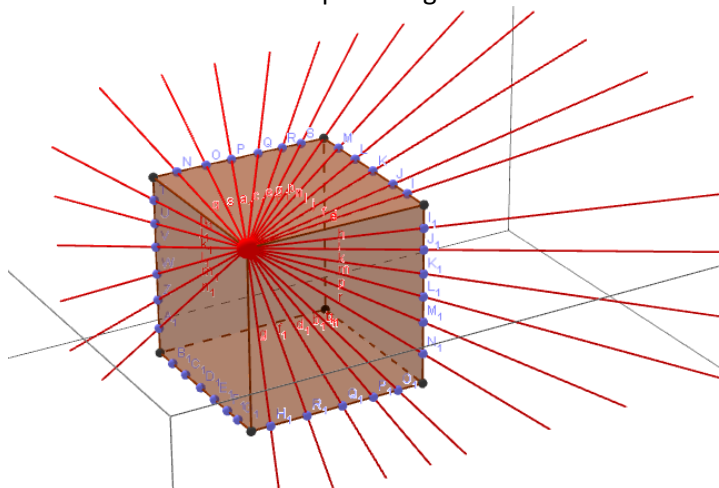


Fig. 2 : Vues de différentes flammes à partir du point de vue du dragon.

Sur la figure 4, le point rouge situé sur l'arrête est mobile sur les 3 faces adjacentes au sommet sur lequel se trouve le dragon. Le plan ainsi créé va couper le cube sur 4 faces. L'intersection entre le plan et le cube définit la ligne droite par ce mode de déplacement. Les figures 5 et 6 mettent en évidence la même flamme sur le cube mais dans 2 points de vue différents.

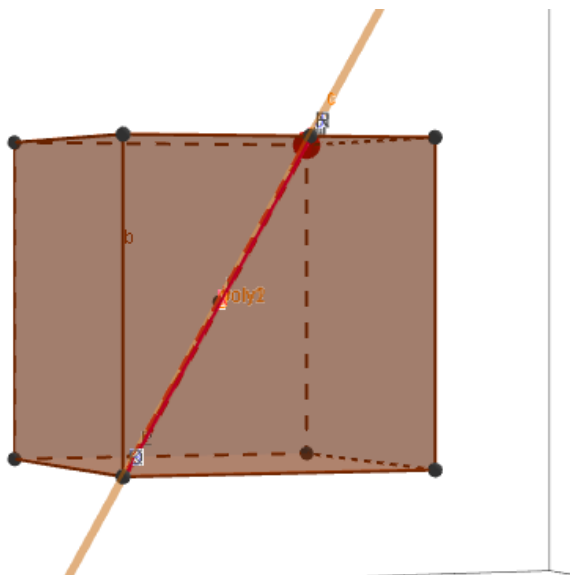


Fig. 5 : Trajet d'une flamme en ligne droite dans un plan depuis un point de vue se situant sur ce plan

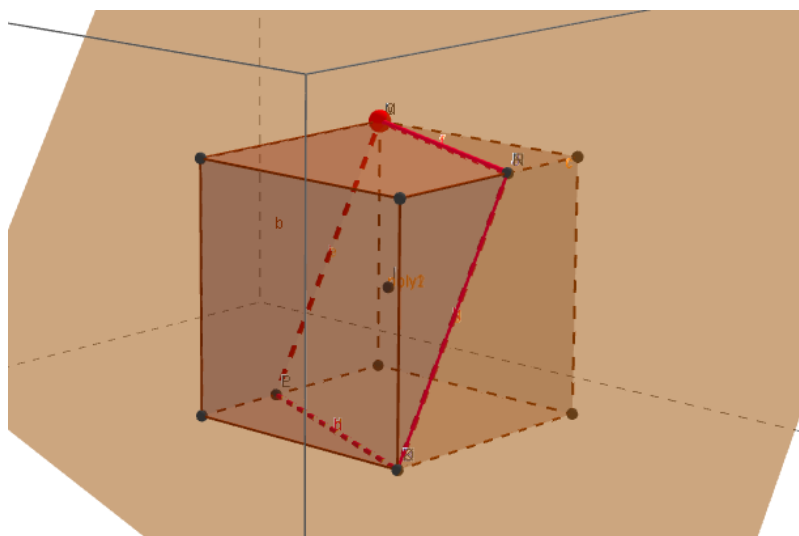


Fig. 6 : Trajet d'une flamme en ligne droite dans un plan depuis un point de vue extérieur au plan

Nous avons remarqué dans géogebra que tous les plans qui passent par le sommet du dragon et par le centre du cube passent forcément par le côté opposé au dragon. En effet comme le sommet du dragon, le centre du cube et le sommet opposé au dragon sont alignés. Tous les plans passant par le sommet du dragon et par le centre du cube passeront obligatoirement par le sommet opposé au dragon.

Pour montrer quelles sont les zones qui peuvent être atteintes par les flammes du dragon, nous avons activé la trace du plan dans Géogebra. Nous avons obtenu les figures 7 et 8 :

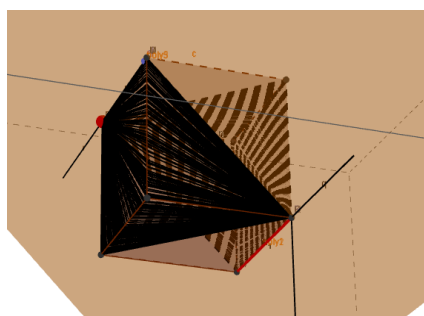


Fig. 7 : Image du cube après activation de la trace du plan

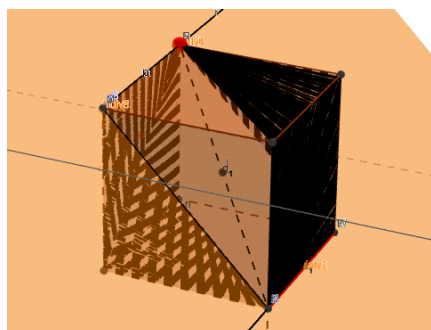


Fig. 8 : Image du cube après activation de la trace

Après activation de la trace des plans possibles si le point mobile se déplace sur une seule face, il ne reste qu'une faible zone non atteinte par les flammes. Cependant, cette zone peut toute être atteinte en créant un plan depuis une autre face que la première.

Pour conclure cette partie, avec ce mode de propagation des flammes, le dragon peut atteindre toutes les parties du cube. De plus, il sera obligé de se brûler avec ses propres flammes car ce mode de propagation des flammes oblige toutes les flammes crachées par le dragon à revenir sur le sommet du dragon.

On peut aussi démontrer que cette hypothèse est juste : la ligne droite est représentée par l'intersection du cube et d'un plan passant par le sommet du dragon. Or on a déjà deux points de ce plan (le sommet du dragon et le centre du cube) il y a donc pour tout point sur le cube, un plan passant par le centre du cube ; le sommet du dragon et ce point. Donc le dragon peut atteindre tout le cube avec ce mode de propagation des flammes.

III – Ligne droite sur le patron

Cette méthode de propagation est celle que l'on a finalement retenue. Le dragon crache une flamme qui se propage en ligne droite selon le patron du cube. Quand la flamme atteint une arête du cube, elle continue sa route sur le cube en suivant la ligne droite sur le patron. Le problème est : que se passe-t-il quand une flamme atteint le bord du patron ? Quand une flamme atteint le bord du patron, on prolonge le patron et on reporte la flamme sur la face qui correspond. (Figure 9)

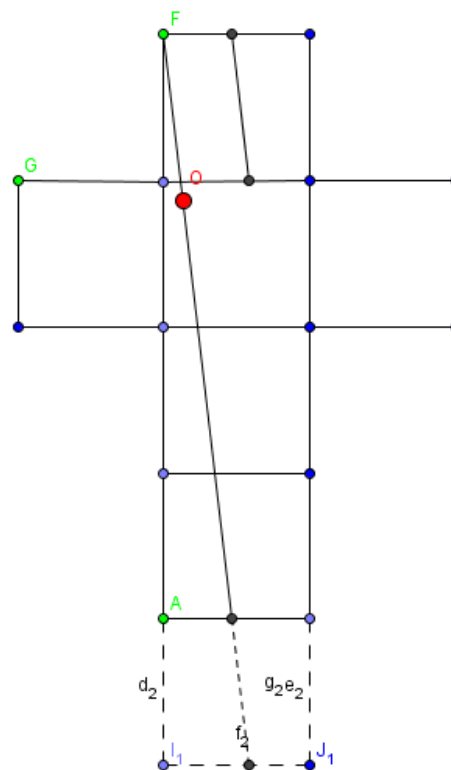


Fig. 9 : Ligne droite sur le patron quand la flamme atteint une arête

On a remarqué que dans certains cas, les flammes que l'on reporte sont parallèles lorsque la face du patron que l'on déplace n'a pas été pivotée. Si elle a été pivotée, on a alors des flammes perpendiculaires. (Voir figures 9, 10, 11 et 12)

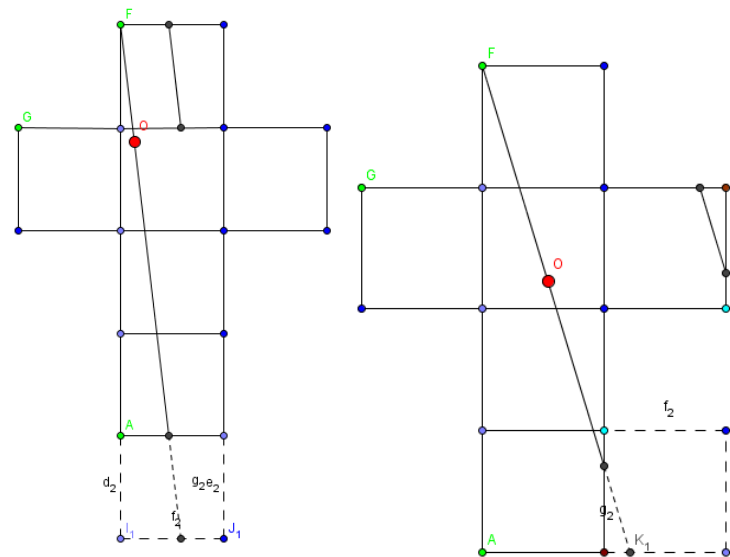
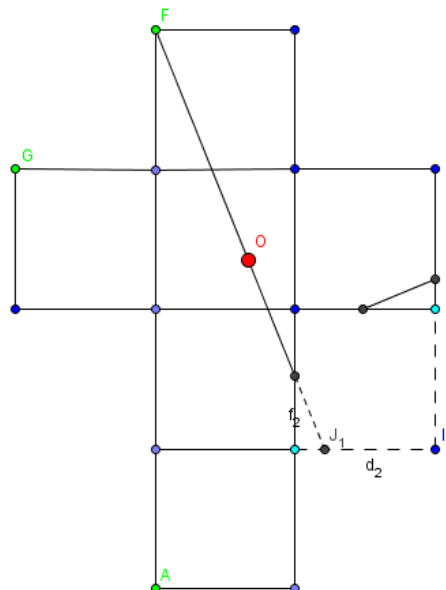


Fig. 9 et 10 : propagation d'une flamme de manière parallèle



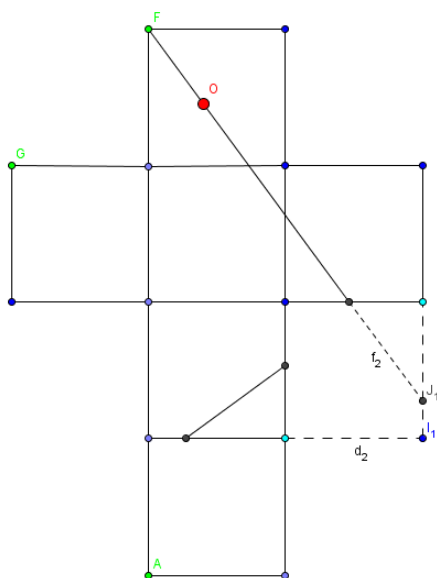


Fig. 11 et 12 : Propagation d'une flamme de manière perpendiculaire

Nous avons cependant remarqué plusieurs exceptions à ce modèle. Le problème s'est posé lorsqu'une flamme a atteint un sommet car selon le patron, la flamme pouvait parcourir plusieurs chemins possibles. Nous avons donc décidé que dans ce cas la flamme emprunterait les deux chemins possibles (Voir fig. 13, 14, 15 et 16)

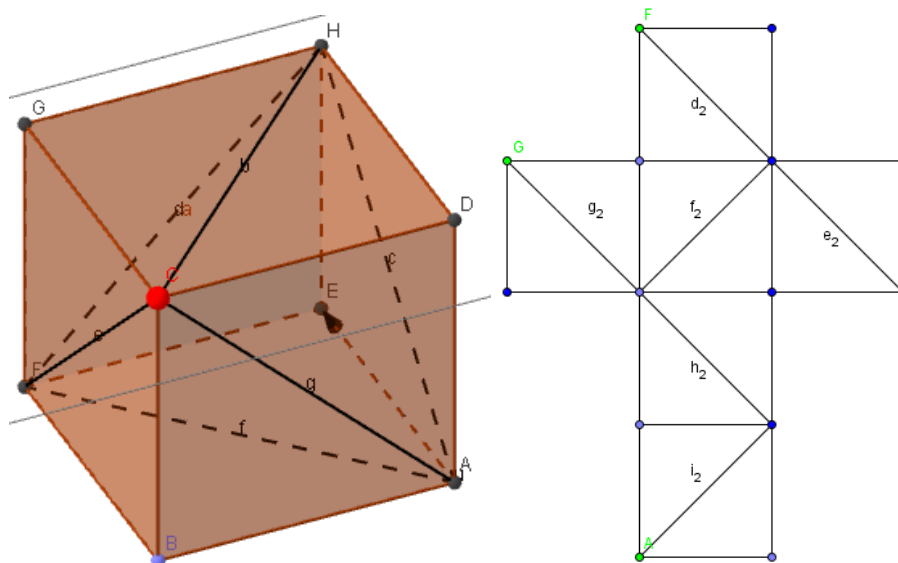


Fig. 13 et 14 : Cas spécial quand la flamme part directement sur un sommet

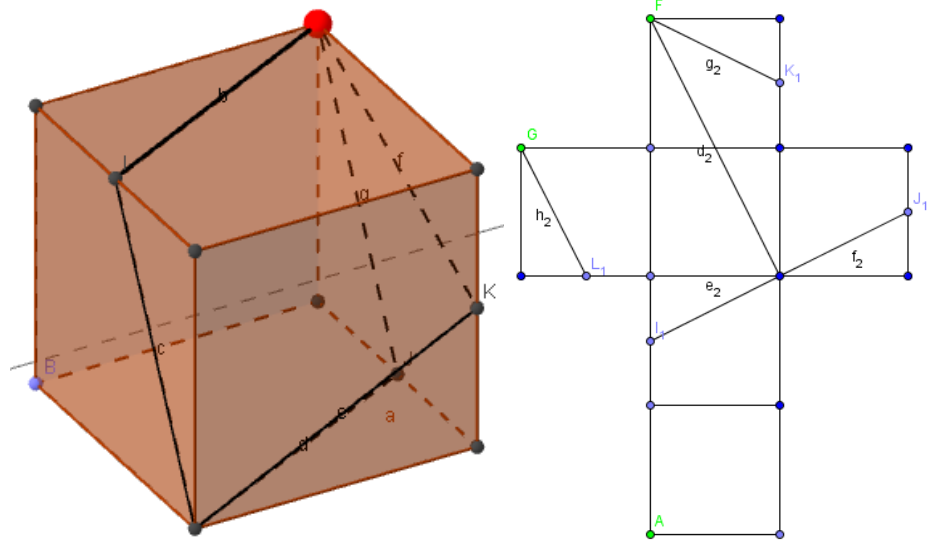


Fig. 15 et 16 : Cas spécial quand la flamme atteint un sommet après un croisement

Il y aurait une infinité d'exceptions car la flamme pourrait bien atteindre un sommet après une infinité de croisements. En modélisant une flamme normale en 3 dimensions, on se rend compte qu'une flamme qui a l'air droite sur le patron parcourt un chemin assez chaotique. (Voir figures 17 et 18)

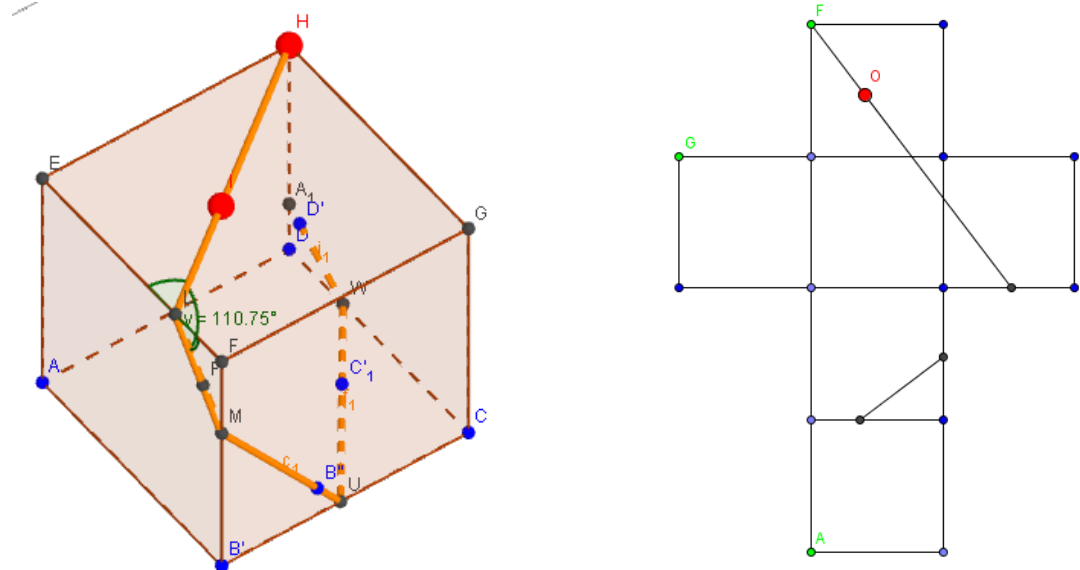


Fig. 17 et 18 : Représentation en 3D et en 2D de la même flamme.

Nous avons donc utilisé le patron pour démontrer quelles zones sont atteintes par les flammes. Pour le démontrer, nous avons activé la trace de la flamme en prenant le point mobile sur une seule face et en ne comptant qu'un seul croisement en dehors du patron. (Voir fig. 19)

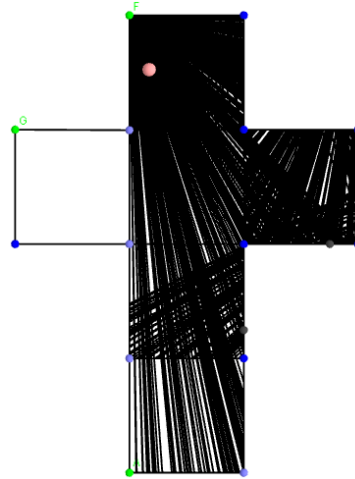


Fig. 19 : Zones atteignables après un croisement sur une seule face

La dernière encore non grisée est atteignable car elle est adjacente au sommet du dragon. (Voir fig. 20).



Fig. 20 : Trajectoires possibles des flammes (toutes les zones sont atteintes)

Pour conclure cette partie, avec ce mode de propagation des flammes, le dragon peut atteindre toutes les parties du cube. Il pourra quelques fois se brûler avec ses propres flammes dans certains cas.

Pour conclure:

- Nous avons tout d'abord défini comment représenter le dragon (par un point) et les flammes (par une ligne droite)

- Nous avons ensuite eu à définir ce que signifie propagation des flammes en ligne droite. Parmi les trois hypothèses que nous avons formulées, nous avons retenu la troisième car c'est le modèle de propagation le plus intéressant.

- Nous avons donc décidé que les flammes se propageraient en ligne droite sur un patron du cube.

- A partir de cette hypothèse, nous avons déduit que toutes les zones de la planète cubique sont atteignables et que le dragon pouvait dans certains cas se brûler avec ces propres flammes. 

Note d'édition

 Une question intéressante que l'on peut se poser pour aller plus loin est la suivante : le dragon peut-il se brûler avec une flamme qui ne passe par aucun autre sommet du cube ?