Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Le Dobble

Auteur : Emeline Berlendis, Terminale S
Encadrants : A. Gaudillière (chercheur au LATP, Marseille), V. Chojnacki, E. Ferron
Lycée Esclangon, Manosque

I. Présentation

Le Dobble est un jeu de réflexes où il faut trouver le symbole commun entre deux cartes le plus rapidement possible, sachant que chaque carte a un unique symbole en commun avec une autre carte. Le jeu contient 55 cartes comportant chacune huit symboles différents.

Notre objectif était de comprendre comment construire un tel jeu et d'étudier les propriétés mathématiques d'une telle construction pour tenter d'améliorer l'intérêt du jeu en modifiant ses règles afin d'en exploiter davantage les propriétés.

II. Découverte et compréhension du jeu

Avant d'étudier la répartition des symboles des 55 cartes du jeu du commerce, nous avons choisi de créer des jeux de Dobble plus simples, c'est-à-dire comportant moins de symboles par carte. Ainsi, nous pourrions plus facilement observer la répartition des symboles, les rapports entre nombre de cartes, nombre de symboles différents utilisés ...

Pour débuter, nous avons considéré des jeux à deux, puis trois et enfin quatre symboles par carte.

Pour construire ces jeux notre première idée a été de lister un grand nombre de cartes possibles puis de choisir parmi elles lesquelles pouvaient former un jeu de Dobble. Cette méthode est longue et imparfaite étant donné que l'on ne sait pas, a priori, de combien de symboles on doit disposer pour pouvoir construire le jeu.

Pour cette raison nous avons préféré opter pour une méthode pas à pas en se donnant une carte de départ et en essayant d'étoffer le jeu au fur et à mesure.

Pour simplifier les notations et nous épargner des efforts d'imagination et de calligraphie de symboles nous avons rapidement choisi de représenter les symboles par des nombres entiers positifs non nuls.

1) Cas $n = 2$

[1]

On se donne une carte de départ $\mathcal{C}_1 = \{1, 2\}$.

Si l'on veut construire une seconde carte, il nous faut un symbole commun avec la première, par exemple 1, et nous avons besoin d'un autre symbole, par exemple 3, pour la compléter. Ainsi on peut y ajouter la carte $\mathcal{C}_2 = \{1, 3\}$.

Si l'on veut construire une troisième carte, il nous faut un symbole commun avec la première et un symbole commun avec la seconde. Deux choix sont possibles :

— si l'on choisit à nouveau le symbole 1 alors cette carte a déjà un symbole commun avec les deux premières et il faut donc un quatrième symbole pour la compléter, on obtient la carte $\mathcal{C}_3 = \{1, 4\}$. On s'aperçoit alors que l'on pourra toujours ajouter une nouvelle carte au jeu mais celle-ci comportera nécessairement le symbole 1 afin d'avoir un symbole commun avec les trois cartes précédemment construites.
On obtient donc un jeu de la forme $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, ... potentiellement infini mais *inintéressant* dans le sens où le symbole commun entre les cartes est toujours le même.

— si l'on choisit le symbole 2, commun avec la carte $\mathcal{C}_1$ il nous faut nécessairement choisir également le symbole 3 commun avec la carte $\mathcal{C}_2$. Nous obtenons la carte $\mathcal{C}_3 = \{2, 3\}$. On s'aperçoit alors qu'il n'est plus possible d'ajouter la moindre carte aux trois précédentes de telle sorte qu'elle ait un et un seul symbole commun avec chacune des précédentes.
On obtient dans ce cas le jeu $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ *clos* car on ne peut pas y ajouter de nouvelle carte mais *intéressant* dans le sens où ce n'est pas toujours le même symbole qui est commun à deux cartes distinctes. On dira que ce jeu est *complet* ou *maximal* : il n'existe pas de jeu intéressant comportant plus que 3 cartes.
Dans ce jeu chacun des symboles apparaît deux fois, nous utilisons trois symboles différents et nous avons obtenus trois cartes.

Lorsque $n = 2$, un jeu complet a 3 symboles et 3 cartes et chacun des symboles apparaît 2 fois.

2) Cas $n = 3$

Nous avons étudié ensuite les jeux de Dobble à trois symboles par carte.

De la même manière que dans le cas $n = 2$ nous avons observé que si l'on se donnait quatre cartes ayant en commun le symbole 1, alors le jeu était inévitablement inintéressant car toute nouvelle carte devait nécessairement comporter le symbole 1.

Le jeu complet et intéressant que nous avons obtenu est le suivant : $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$.

Lorsque $n = 3$, un jeu complet a 7 symboles et 7 cartes et chacun des symboles apparaît 3 fois. [2]

3) Cas $n = 4$

Le cas $n = 4$ nous a demandé davantage de travail mais nous avons obtenu des résultats analogues :

si l'on se donnait cinq cartes ayant en commun le symbole 1, alors le jeu était inévitablement inintéressant.

Le jeu complet et intéressant que nous avons obtenu est le suivant : $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 5, 6, 7\}$, $\{1, 8, 9, 10\}$, $\{1, 11, 12, 13\}$, $\{2, 5, 8, 11\}$, $\{2, 6, 9, 12\}$, $\{2, 7, 10, 13\}$, $\{3, 5, 9, 11\}$, $\{3, 6, 10, 12\}$, $\{3, 7, 8, 13\}$, $\{4, 5, 10, 12\}$, $\{4, 6, 8, 11\}$, $\{4, 7, 9, 13\}$

Lorsque $n = 4$, un jeu complet a 13 symboles et 13 cartes et chacun des symboles apparaît 4 fois.

III. Vocabulaire et conjectures

A ce stade de notre étude nous avons pu établir quelques conjectures concernant les jeux complets. Mais avant de les énoncer il nous a paru nécessaire de préciser le vocabulaire que nous employons.

a) Vocabulaire

Dans la suite de ce document nous emploierons le vocabulaire et les notations suivantes :

Symboles : Pour simplifier les notations un symbole sera représenté dans la suite par un nombre entier naturel non nul.

Cartes : n étant un entier naturel non nul, une carte est un ensemble de n symboles distincts. n est alors appelé le nombre de symboles par carte.

Jeu de Dobble : un jeu de Dobble est un ensemble de cartes vérifiant la propriété suivante : pour tout couple de cartes distinctes (A, B) , $A \cap B$ est un singleton.

Degré d'un symbole : dans un jeu de Dobble, on appelle degré d'un symbole k le nombre de ses apparitions r_k dans l'ensemble du jeu.

Jeu inintéressant : on dit qu'un jeu de Dobble est inintéressant lorsqu'il existe un symbole s tel que pour tout couple de cartes distinctes (A, B), on a $A \cap B = \{s\}$.

Jeu clos : un jeu de Dobble est dit clos lorsqu'il n'est pas possible d'étoffer le jeu en y ajoutant de nouvelles cartes.

Jeu complet : un jeu de Dobble est dit complet lorsqu'il est intéressant et qu'il n'existe pas de jeu intéressant comportant davantage de cartes.

b) Conjectures

D'après nos études des cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ nous avons tenté d'établir des formules liant le nombre de symboles par carte et les différents éléments d'un jeu complet : nombre de cartes, nombre de symboles utilisés et degré des symboles utilisés.

Conjecture 1 : dans un jeu intéressant, le degré d'un symbole est inférieur ou égal au nombre de symboles par cartes n.

Conjecture 2 : dans un jeu complet, le nombre de cartes et de symboles utilisés est égal à $n^2 - n + 1$.

IV. Démonstrations des propriétés des jeux intéressants

Théorème 1 ***Dans un jeu intéressant, le degré d'un symbole est inférieur ou égal au nombre de symboles par cartes.***

Démonstration :

Par contraposée, supposons que le symbole 1 apparaisse sur n+1 cartes :

$$\mathcal{C}_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{1, n+1, \ldots, 2n-1\}$$
$$\mathcal{C}_3 = \{1, 2n, \ldots, 3n-2\}$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{C}_k = \{1, \ldots, kn-(k-1)\}$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{C}_n = \{1, \ldots, n^2-n+1\}$$
$$\mathcal{C}_{n+1} = \{1, \ldots, n^2\}$$

Créons une carte $\mathcal{C}_{n+2}$ Si cette carte ne contient pas 1, elle doit posséder un symbole de chacune des cartes précédentes autre que 1, c'est-à-dire $n+1$ symboles distincts. Or une carte contient n symboles donc c'est impossible.

La carte $\mathcal{C}_{n+2}$ contient donc nécessairement le 1, et c'est un jeu inintéressant.

Théorème 2 ***Si le jeu est intéressant alors le nombre de cartes utilisées est inférieur ou égal à $n^2 - n + 1$.***

Démonstration :

On considère une carte comportant les symboles $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on note r_1, r_2, ..., r_n le degré respectif de chacun de ses symboles.

Il y a donc $r_1 - 1$ autres cartes comportant le symbole 1, $r_2 - 1$ autres cartes comportant le symbole 2, ..., $r_n - 1$ autres cartes comportant le symbole n.

Chacune de ces autres cartes sont distinctes car sinon elles auraient deux symboles en commun. Cela donne donc $(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \ldots + (r_n - 1) = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) - n$ cartes ayant un symbole en commun avec la carte $\{1, 2, \ldots, n\}$. Or toutes les cartes du jeu ont un symbole en commun avec la carte $\{1, 2, \ldots, n\}$ (sauf elle-même), donc on a : $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) - n = c - 1$ où c est le nombre de cartes dans le jeu.

Or d'après le théorème 1, comme le jeu est supposé intéressant, chacun des r_i est inférieur ou égal à n donc : $c - 1 \leqslant n^2 - n$ ou encore $c \leqslant n^2 - n + 1$.

Théorème 3 ***Lorsque le degré de chaque symbole est égal au nombre de symboles par cartes, le nombre de cartes et de symboles utilisés vaut $n^2 - n + 1$.***

Démonstration :

Dans le théorème 2 nous avons établi que $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) - n = c - 1$. Or si chacun des r_i est égal à n, on a alors $n^2 - n = c - 1$ ou encore $n^2 - n + 1 = c$. Le nombre de cartes est donc maximal.

En outre, le nombre de symboles utilisés p multiplié par leur degré n est égal au nombre de cartes du jeu multiplié par le nombre de symboles par cartes : $pn = cn$. Donc $p = c = n^2 - n + 1$.

V. Construction géométrique d'un jeu de Dobble

1) Etude du jeu du commerce

Le jeu du commerce comporte huit symboles par cartes. En appliquant les théorèmes vus plus haut le jeu, s'il était complet, devrait comporter $8^2 - 8 + 1 = 57$ cartes et symboles distincts et chaque symbole devrait apparaitre huit fois. Or le jeu ne comporte que 55 cartes. Cet écart est-il dû au fait qu'un jeu à huit symboles par carte ne peut pas atteindre l'optimum vu plus haut ou bien les développeurs du jeu ont-ils omis volontairement ou non deux cartes ?

Nous avons donc essayé d'étudier le jeu du commerce. Mais comment ranger les cartes pour tenter de trouver les deux cartes éventuellement manquantes ?

Nous avons cherché à agencer les cartes de façon à trouver une structure particulière.

Tout d'abord, nous avons essayé de répartir les cartes selon un tableau, en tentant de placer sur une ligne ou une colonne toutes les cartes ayant un symbole commun. Après quelques essais infructueux, cela s'est avéré impossible car les lignes de huit cartes disposées parallèlement avaient toujours une carte commune.

Malgré tout l'analogie faite en associant une carte à une case et un symbole à une ligne ou à une colonne était très intéressante, et nous avons finalement réussi à la reformuler en **"un symbole est une droite" et "une carte est un point"**. En effet, la propriété essentielle du jeu de Dobble est "étant donné deux cartes, il existe un unique symbole commun à ces deux cartes". Avec notre analogie, cette phrase devient "Etant donnés deux points distincts, il existe une unique droite passant par ces deux points".

Cependant dans le cadre de la géométrie classique, cette analogie pose un problème. Nous avons établi dans la première partie qu'il y a une bijection entre le nombre de points (cartes) et le nombre de droites (symboles) dans le cas d'un jeu complet. Les propriétés des points doivent donc être les mêmes que celles des droites. Or par deux points distincts on pourra toujours faire passer une droite mais pour deux droites distinctes on n'a pas nécessairement un point d'intersection. Comment faire dans le cas de droites parallèles ?

Il y a un cadre géométrique qui a été évoqué par notre professeur dans lequel tout couple de droites, parallèles ou non, ont un point d'intersection : **la géométrie projective**.

En géométrie projective, chaque famille de droites parallèles se coupent en un **point de fuite** situé sur la **ligne d'horizon**. Sous l'hypothèse ou le jeu de Dobble classique peut être complet, combien nous faudrait-il de points de fuites ?

L'horizon étant une "ligne" ou une droite, on peut lui associer un symbole. Chaque symbole apparaissant huit fois, il devrait y avoir huit points de fuite sur notre horizon déterminant les points d'intersection de huit familles de droites parallèles.
Chaque droite comporte alors sept points plus un huitième sur la ligne horizon. Notre dessin complet devrait donc avoir 8 cartes de "fuite" sur l'horizon et 49 disposées en un carré de 7 sur 7.

Un autre problème est apparu dans notre construction : les familles de droites horizontales et verticales forment bien deux familles de droites parallèles. Mais où sont les six autres ?

Nous avons commencé à envisager des droites obliques dans notre dessin mais à part la diagonale principale, aucune ne comporte sept cartes. Là aussi, notre professeur nous a aiguillé en nous faisant remarquer que la disposition des droites était arbitraire et que l'on pouvait très bien replacer en haut

la ligne posée en bas et à droite la ligne posée à gauche sans changer la structure globale. Autrement dit les droites s'enroulent autour du carré central. On obtient alors une structure géométrique en forme de **tore**.

Cette deuxième idée importante en tête nous avons réarrangé les lignes et les colonnes pour faire apparaitre nos droites en correspondance avec les points de fuites déjà disposés.

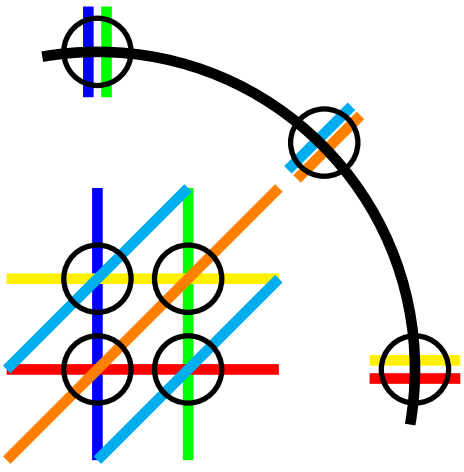
Une fois les cartes ordonnées nous avons finalement pu voir qu'il manquait bien deux cartes dans le jeu du commerce.

2) Construction géométrique d'un jeu complet

On se donne un symbole représentant l'horizon. Sur chacune des n cartes de l'horizon, il y a $n-1$ autres symboles donc une carte est le point de fuite de $n-1$ droites parallèles.

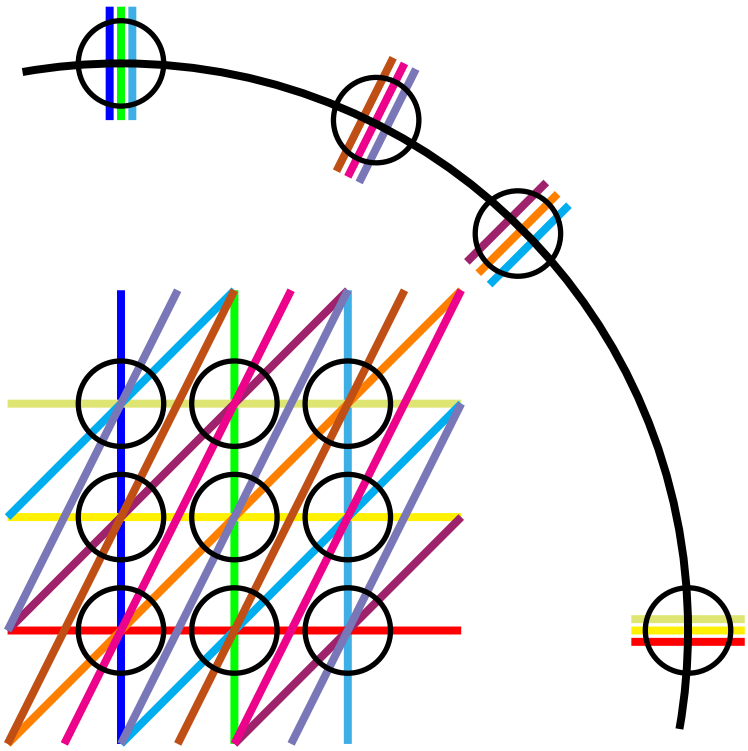
La façon dont est construit un jeu peut être illustrée par les dessins ci-dessous. Les cercles désignent les cartes et les droites les symboles.

Cas $n = 3$

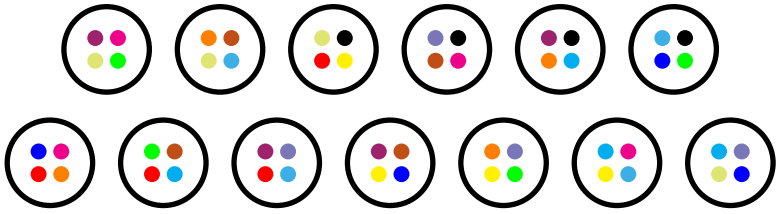


On obtient donc le jeu suivant :

Cas $n = 4$



On obtient donc le jeu suivant :



Ainsi, pour un horizon de n cartes, n étant dans ce cas le degré maximal d'un symbole, on obtiendra $n(n-1) = n^2 - n$ droites, c'est-à-dire un ensemble de $n-1$ droites parallèles pour chaque carte de l'horizon. Chaque ensemble de droites parallèles est caractérisé par un vecteur directeur. Ainsi, nous aurons n vecteurs directeurs allant de $(1,0)$ à $(1,n-2)$ et le vecteur directeur des droites verticales $(0,1)$.

En construisant géométriquement le jeu de Dobble nous avons constaté que le jeu avait une autre propriété géométrique que celle utilisée dans le jeu du commerce. Non seulement par deux points il passe une unique droite (autrement dit deux cartes distinctes ont un symbole commun unique) mais deux droites distinctes ont un unique point d'intersection autrement dit : **étant donnés deux symboles distincts il existe une unique carte les comportant tous les deux**.

3) Etude de la construction de jeux de Dobble quelconques par la méthode géométrique

Nous avons appliqué cette méthode pour essayer de construire des jeux pour n allant de 3 à 12. Nous avons remarqué que pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$ et $n = 12$, cette construction était très efficace et nous a permis de construire rapidement des jeux complet à 3, 4, 6 et 12 symboles par carte.

En revanche, pour les cas $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$, $n = 10$ et $n = 11$, certains symboles se répétaient plusieurs fois sur une même droite, rendant ce système de répartition problématique.

Dans les cas $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$ et $n = 12$, on se retrouve avec un carré central de côté $n - 1$ égal à 2, 3, 5, 7 et 11 qui sont tous des nombres premiers alors que dans les autres cas le carré central a un côté $n - 1$ composé.

Conjecture 3 : la construction géométrique d'un jeu complet à n symboles par carte est possible si, et seulement si, $n - 1$ est premier.

Pour comprendre ce problème nous avons dû passer à une étude plus analytique de la construction géométrique. Nous nous sommes fixés un repère et avons considéré les coordonnées des points et les équations réduites des droites de notre construction. Pour cela nous avons dû travailler dans des ensembles de nombres cycliques pour faire ressortir la propriété de tore de notre construction. En effet, pour que les droites tournent autour du carré central, il fallait envisager qu'après avoir compté jusqu'à $n - 2$ nous retournions à 0, autrement dit de calculer modulo $n - 1$.

Par exemple, dans le cas $n = 3$, nous calculons modulo 2.

Les opérations dans l'ensemble noté $\mathbb{F}_2$ comportant uniquement les nombres 0 et 1 sont :

$+$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

$\times$	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

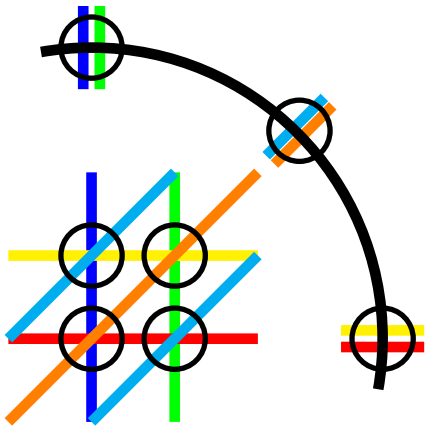
La construction comporte donc les points $\{(\mathbf{0},\mathbf{0});(\mathbf{1},\mathbf{0});(\mathbf{0},\mathbf{1});(\mathbf{1},\mathbf{1});\infty_\infty;\infty_1;\infty_0\}$ où les points ∞_∞ , ∞_1 et ∞_0 désignent respectivement les points de fuites des droites verticales (coefficient directeur infini), de coefficient directeur 1 et horizontale (coefficient directeur nul).

Et les 7 droites d'équations respectives :

$x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{1}$,
$y = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{1}$,
$y = x$, $y = x + \mathbf{1}$
et l'**horizon**.

La droite d'équation $x = \mathbf{0}$ passe par les points $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ et $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ ainsi que par le point ∞_∞.
La droite d'équation $x = \mathbf{1}$ passe par les points $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ et $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ ainsi que par le point ∞_∞.
La droite d'équation $y = \mathbf{0}$ passe par les points $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ et $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ ainsi que par le point ∞_0.
La droite d'équation $y = \mathbf{1}$ passe par les points $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ et $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ ainsi que par le point ∞_0.
La droite d'équation $y = x$ passe par les points $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ et $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ ainsi que par le point ∞_1.

La droite d'équation $y = x + \mathbf{1}$ passe par les points $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ et $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ ainsi que par le point ∞_1.



En utilisant cette méthode pour étudier le cas $n = 7$, nous allons voir pourquoi la construction géométrique ne fonctionne plus.

Lorsque $n = 7$, on calcule modulo 6. Prenons par exemple la droite d'équation $y = 2x$. Cette droite passe par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(3, 6)$ c'est-à-dire $(3, 0)$ (lorsqu'on calcule modulo 6). Or $(0, 0)$ et $(3, 0)$ sont également deux points de la droite d'équation $y = 0$. Autrement dit les droites d'équations $y = 2x$ et $y = 0$ ont deux points d'intersection c'est-à-dire que deux cartes ont deux symboles en commun.

Ce phénomène se produit lorsque le nombre $n-1$ est composé c'est-à-dire lorsqu'il a des diviseurs distincts de 1 et de lui-même. Par exemple pour $n = 7$, $n - 1 = 6$ peut se décomposer en 2×3, il y aura donc des problèmes pour les droites de coefficients directeurs 2 et 3. Dans notre ensemble de nombres, 2 et 3 apparaissent comme des diviseurs de 0 non nuls. Autrement dit dans cet ensemble il existe des nombres A et B non nuls dont le produit est nul.

Notre construction géométrique fonctionne si et seulement si $n - 1$ n'a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même c'est-à-dire si il est premier.

On peut donc a priori construire des jeux de Dobble par cette méthode pour un nombre de symboles par carte n de la forme $p + 1$ où p est un nombre premier.

Théorème 4 ***La construction géométrique est possible si, et seulement si, $n - 1$ est premier.***

Démonstration :

On pose $q = n - 1$. La construction géométrique proposée est possible lorsque deux droites quelconques ont un unique point commun dans le plan projectif sur l'ensemble à q éléments.

Sens $\Leftarrow$:

On considère alors deux droites dans le plan projectif sur l'ensemble à q éléments. Trois cas sont possibles :

- Les deux droites sont "verticales". Dans ce cas elles ont un unique point d'intersection à l'horizon, noté ∞_∞.
- Une droite est "verticale" d'équation $x = k$ et l'autre "oblique" d'équation $y = ax + b$. Dans ce cas elles ont un unique point d'intersection de coordonnées $(k; ak + b)$.

- Les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont obliques d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

$$M(x,y) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \\ ax + b = a'x + b' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x(a - a') = b' - b \\ y = ax + b \end{array} \right.$$

Si $a - a' = 0$, les deux droites sont parallèles et se coupent en un point de fuite noté ∞_a, et si $a - a' \neq 0$, comme q est premier alors tout les nombres non nuls ont un inverse, en particulier $a - a'$. Donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en le point de coordonnées $\left(\dfrac{b' - b}{a - a'}; \dfrac{b'a - a'b}{a - a'}\right)$.

En conclusion, si n-1 est premier, la construction géométrique est possible

Sens $\Rightarrow$:

Par contraposée, supposons q non premier. Il existe donc deux nombre r et s non nuls modulo q tels que $q = rs$. On considère alors les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $y = 0$ et $y = rx$. Les points $(0,0)$ et $(s,0)$ sont distincts et appartiennent à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Nous avons donc deux droites distinctes ayant deux points d'intersection. La construction géométrique n'est donc pas possible.

En conclusion, si la construction géométrique est possible alors $n - 1$ est nécessairement premier.

Cependant la question reste ouverte de savoir si on peut construire des jeux de Dobble (avec d'autres méthodes) dans les situations où n n'est pas de la forme $p + 1$. [3]

VI. Comment rendre plus intéressant le jeu de Dobble ?

Pour terminer, nous allons proposer une modification des règles du jeu de Dobble afin de le rendre plus intéressant.

En étudiant les méthodes de construction du jeu de Dobble nous avons trouvé, outre la propriété principale que **deux cartes ont toujours un unique symbole en commun**, trois propriétés supplémentaires intéressantes qui n'apparaissent pas lorsque l'on joue au Dobble de manière classique :

- **étant donné deux symboles distincts, il existe une unique carte les comportant tous les deux** (si le jeu est supposé complet) ;
- **l'un des symboles peut être choisi comme la ligne d'horizon** de la construction géométrique et peut jouer un rôle particulier ;
- lorsqu'un symbole est choisi comme horizon, **les autres symboles (ou droites) s'enroulent autour d'un tore**.

Nous avons complètement modifié la façon de jouer au Dobble pour pouvoir prendre en compte ces quatre propriétés. Voici nos nouvelles règles du jeu :

Règles du jeu du **Dobble Horizon**

Pour jouer au Dobble Horizon il vous faut :

- De 2 à 4 joueurs.
- Un jeu de carte Dobble classique.
- Un plateau de jeu Dobble Horizon.

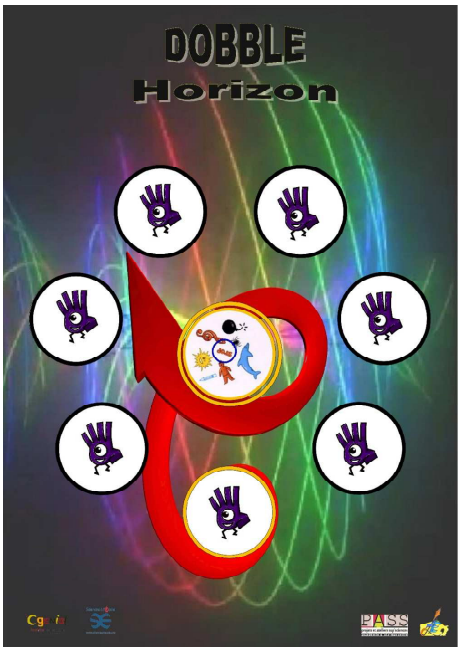
But du jeu :

Obtenir le plus grand nombre de points sur l'ensemble des trois ***manches*** d'une partie de Dobble Horizon.

Commencer une manche de Dobble Horizon :

Pour commencer une *manche* de Dobble Horizon, on retourne la carte supérieure du paquet et on la place au centre du plateau de Dobble Horizon (emplacement marqué de deux anneaux jaunes). Cette carte sera par la suite désignée comme ***carte maîtresse*** de la manche. Le symbole central de la *carte maitresse* désigne le ***symbole horizon*** pour la manche. Toute carte comportant le *symbole horizon* sera appelée une ***carte horizon***.

Par exemple : la *carte maitresse* tirée est la suivante, elle est positionnée au centre du plateau. Le symbole "STOP" est le *symbole horizon*.



On distribue à chacun des joueurs huit cartes. Les cartes restantes constituent la ***pioche***. Chaque joueur choisit deux cartes parmi les huit qui lui ont été distribuées et les pose face cachée devant lui. Les six cartes restantes constituent sa ***main***.

Une manche de Dobble Horizon se décompose en un certain nombre de plis :

Commencer un pli de Dobble Horizon :

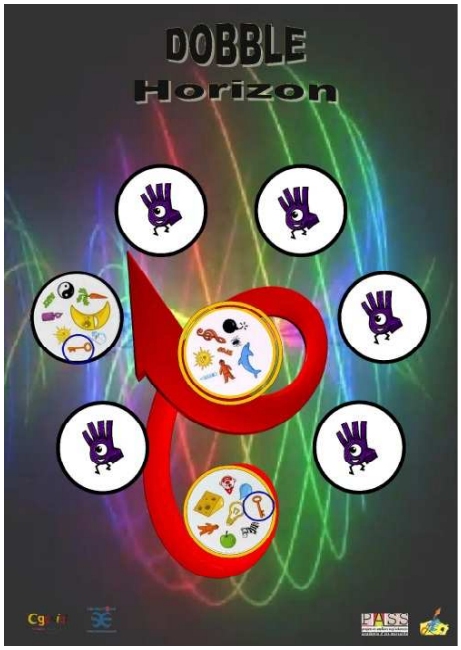
Le premier joueur commence en posant l'une des cartes de sa *main* face visible sur l'emplacement marqué d'un anneau jaune (***position de début du tour***). Cette carte sera par la suite désignée comme ***carte du début du tour***. On oriente alors la *carte maitresse* de telle sorte que son symbole commun à la *carte du début du tour* soit face à cette dernière.

Par exemple : le premier joueur joue la carte suivante et la place à la *position de début du tour*. Elle devient la *carte du début du tour*. La *carte maitresse* est orientée de telle sorte que son symbole commun avec la *carte du début du tour*, le "bonhomme" soit face à cette dernière.

Le second joueur choisit l'une des cartes de sa *main*. Sa carte a nécessairement un symbole commun avec la *carte maîtresse*. S'il s'agit du *symbole horizon* voir la partie intitulée "Poser une carte horizon". Sinon, le joueur pose sa carte sur l'emplacement faisant face au symbole commun avec la *carte maîtresse*. La carte posée par le second joueur a également un symbole commun avec la *carte de début du tour* posée par le premier joueur. Ce symbole est appelé ***symbole du pli***. Le second joueur a ainsi l'avantage de choisir le *symbole du pli*.

Par exemple : le second joueur joue la carte suivante et la place en vis à vis du symbole commun avec la *carte maîtresse*.

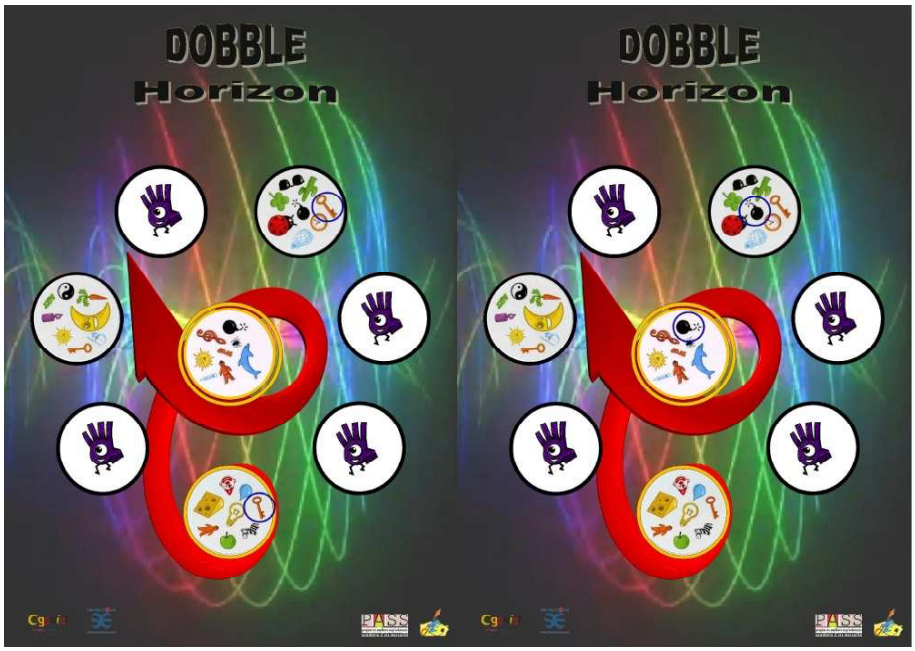
Le symbole commun avec la *carte de début du tour*, ici la "clef" devient le *symbole du pli*.



Ensuite, les joueurs, à tour de rôle, peuvent soit poser une carte de leur *main* comportant le *symbole du pli* soit piocher une carte. Si la carte choisie est une *carte horizon*, voir la partie intitulée

"Poser une carte horizon". Sinon, les joueurs placent leur carte face au symbole commun avec la *carte maîtresse*.

Par exemple : ici le troisième joueur pose une carte comportant le *symbole du pli*, la "Clef", et la positionne face au symbole commun avec la *carte maîtresse* la "bombe".



Lorsqu'aucun joueur ne peut plus poser de cartes comportant le *symbole du pli*, le joueur ayant posé la dernière carte récupère toutes les cartes posées sur le plateau mis à part la *carte maîtresse* et les pose face cachée devant lui. On dit que le joueur a remporté le *pli*.

Le joueur ayant remporté le pli entame alors le pli suivant en posant l'une des cartes de sa *main* sur la position de début du tour.

Accomplir un tour : Au centre du plateau de Dobble Horizon une flèche rouge indique le sens du ***tour***. Lors d'un pli lorsqu'un joueur (mis à part le second joueur du pli) pose sa carte de telle sorte qu'il passe la *position de début du tour* depuis la dernière carte posée. On dit qu'il a accompli *un tour*. Lorsqu'un joueur a accompli *un tour*, il retourne l'une des cartes face cachée posées devant lui et la pose à côté. Si un joueur n'a plus de cartes face cachée devant lui, le tour n'est pas comptabilisé.

Par exemple : le joueur suivant pose la carte ci-dessous :

Il a accompli un tour en passant la position de début du tour depuis la dernière carte posée (qui comportait la "bombe").

Poser une carte horizon : Lorsqu'un joueur pose une carte horizon, il ramasse toutes les cartes posées sur le plateau mis à part la *carte maîtresse* et les place face cachée devant lui. Il remporte alors le *pli* (Il ne peut y avoir au maximum qu'une seule *carte horizon* pour un *symbole du pli* donné). C'est alors au joueur précédent de débuter le pli suivant.

Par exemple : le joueur suivant choisit de poser la *carte horizon* ci-dessous. Elle comporte bien le *symbole du pli* (la "clef") et le *symbole horizon* (le "STOP").

Il remporte alors le pli en ramassant toutes les cartes du plateau sauf la *carte maîtresse*.

Fin d'une manche :

Lorsque l'un des joueurs pose la dernière carte de sa main, le pli se termine normalement en passant le tour du ou des joueur(s) n'ayant plus de cartes. La manche est alors terminée. C'est le moment de compter les points de la manche.

Compter les points à la fin d'une manche :

Chaque joueur compte le nombre de points qu'il a obtenu lors de la manche :

— une carte restée face cachée devant lui rapporte un point ;
— une carte retournée rapporte deux points ;
— pour les joueurs ayant encore des cartes en main à la fin de la *manche*, chacune d'elles fait perdre un point.

Si le total des points d'un joueur s'avère négatif, son score pour la *manche* est ramené à zéro.

Fin d'une partie de Dobble Horizon :

Une partie de Dobble Horizon se joue en trois manches. Le joueur ayant remporté une manche entame le premier pli de la manche suivante. A l'issue des trois manches, on additionne les scores de chacune des manches et est déclaré vainqueur le joueur ayant obtenu le plus grand nombre de points.

Variante pour les secondes et troisièmes manches :

La seconde *manche* d'une partie de Dobble Horizon se déroule de la même manière que la première à une exception près : à chaque pli, après que le premier joueur a posé la *carte du début du tour*, le joueur qui le plus rapidement choisira l'une de ses cartes et désignera le symbole commun à la *carte maîtresse* et à la *carte du début du tour* de sa carte tout en la posant à sa place sur le plateau, sera désigné comme second joueur. Sa carte établira alors le *symbole du pli*. Les joueurs joueront ensuite tour à tour après le second joueur comme lors de la première *manche*.

Au début de la troisième *manche*, avant d'entamer le premier *pli*, le joueur qui aura le score le plus faible, choisira de jouer la troisième et dernière *manche* à la manière de la première ou de la seconde *manche*.

Notes d'édition :

[1] n désigne le nombre de symboles par carte de jeu.

[2] Ce résultat est donné ici sans démonstration mais sera montré au théorème 2.

[3] Ce problème est relié à celui de la classification des plans projectifs finis, qui reste largement ouvert à l'heure actuelle.