LE DÉFI DU PRISONNIER

Année 2015-2016

Elèves : Hugo Alonso, Daoud Khadim Allah, Iheb Benmokhtar, Miloud Lahcène, Thomas Cayla, Myra Perillat, Gautier Olive, Diane Naffah.

Encadrée.e.s par : M. Duprat (Collège Michelet) et Mme Maiouf (Collège Jolimont)

Etablissements : Collèges Michelet et Jolimont de Toulouse

Chercheurs : Damien Bouloc et Anne Lonjou, de l'Université de Paul Sabatier.

Sujet :

Dans une lointaine contrée, un homme est fait prisonnier. Une chaîne est attachée à un de ses pieds puis enroulée autour de 4 barreaux et enfin rattachée à son autre pied. Le roi, joueur, lui lance le défi suivant :

« Si tu t'enchaînes aux 4 barreaux de sorte que tu sois prisonnier mais que lorsque j'enlève un barreau (n'importe lequel) tu sois libéré, c'est-à-dire que la chaîne se déroule, alors tu seras libre ! Dans le cas contraire tu devras purger ta peine. Attention, tu n'as le droit qu'à une seule tentative.»

Question :

Pouvez-vous aider le prisonnier ? Sachez que le roi déteste les tricheurs et que si avant d'enlever un barreau le prisonnier n'était pas vraiment attaché, il restera en prison à vie.

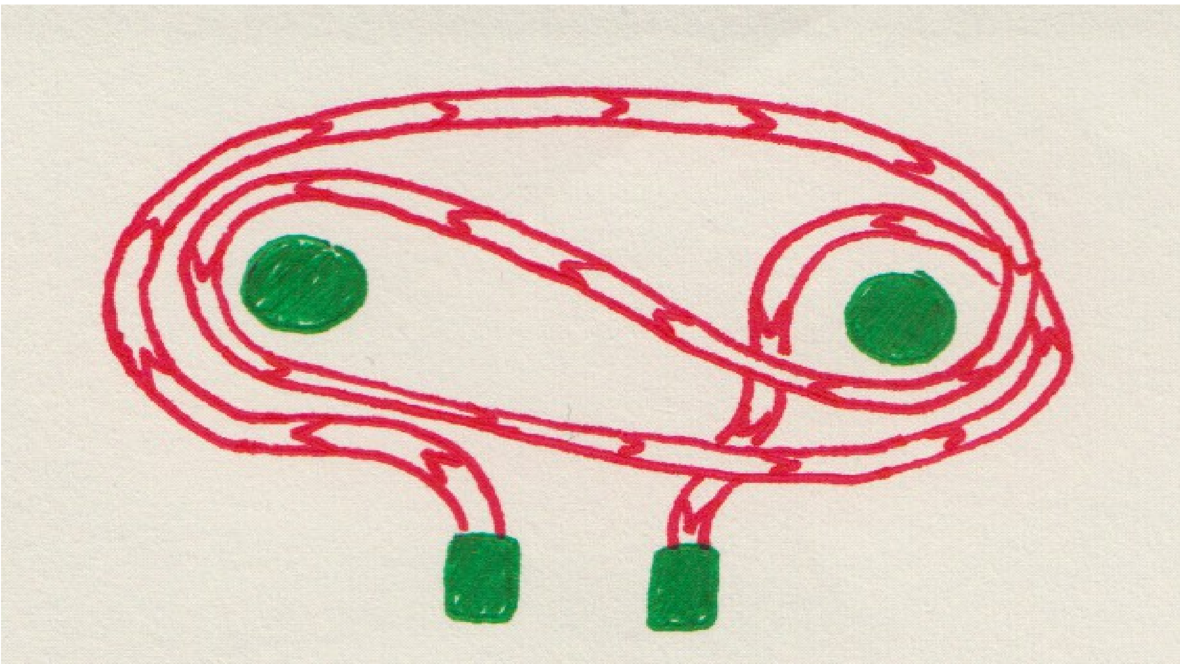
Explications :

I. Nœud pour 1 barreau

Nous avons d'abord essayé avec un barreau, et toutes les combinaisons possibles marchaient, puisque lorsqu'on devait choisir un barreau à enlever, il n'y avait que celui-là et le nœud se défaisait automatiquement.

II. Nœud pour 2 barreaux

Puis avec deux barreaux, en testant des combinaisons « au hasard », nous dessinions sur des feuilles en essayant de trouver une logique. Nous avons trouvé, à force d'essais et de dessins, mais nous n'avions pas de technique propre. (1)



III. Formule pour 3 barreaux

Quand nous sommes arrivés à trois barreaux, ça s'est compliqué. Nous ne pouvions plus dessiner ou tester à tout-va, ça prenait trop de temps, et il y avait trop de possibilités.

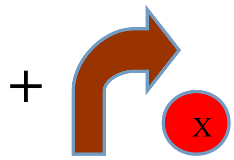
Nous avons donc eu l'idée de transcrire nos nœuds en formules littérales.

Ainsi, chaque barreau est nommé : « x », « y », « z » ou « a ».

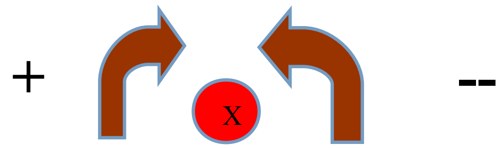
« - » correspond à un sens, « + » à un autre :

A partir de ça nous avons testé des formules littérales plutôt que directement des nœuds.
Donc si deux mêmes lettres de signes différents se suivent, les tours s'annulent ; par exemple :
+ x – x donne :

1)



2)



Pour que la formule correspondant à un nœud se simplifie, il faut : (2)

- qu'après avoir enlevé un barreau, on enlève de la formule toutes les lettres correspondantes à ce barreau.

- qu'après avoir enlevé les lettres de ce barreau, toutes les autres se simplifient entre elles de cette manière (on prend pour exemple la formule pour 3 barreaux) :

z + x + z – x + y + x – y – z + y – x – y – z (3)

On enlève les **x** (le barreau x) :
Ce qui donne : **z + z + y – y – z + y – y – z**

Les deux « **+ y - y** » se simplifient : à chaque opération de ce genre, entre deux mêmes lettres de différents signes et conjointes, elles peuvent s'enlever puisqu'elles correspondent à l'annulation d'un tour.

On enlève donc les deux « **+ y - y** ».
Ce qui donne : **z + z – z – z**

On enlève le « **+ z - z** » du milieu :
z - z ; qui se simplifient : notre nœud est défait.

IV. La formule pour quatre barreaux

Au début, on ne maîtrisait pas complètement la technique des lettres, et nous avons trouvé la formule pour trois barreaux un peu par hasard.

Nous avons donc commencé par placer des lettres sur une feuille, avec des « **+** » et des « - », dans le désordre. Plus tard, notre professeur nous a aidés en nous conseillant de réutiliser la formule pour deux barreaux. Nous ne l'avons pas vraiment fait tout d'abord, puis, voyant que nous n'y arrivions vraiment pas, avons pris ce conseil plus au sérieux.

Après plusieurs essais, nous avons constaté que pour toutes les formules qui ne marchaient pas avec toutes les lettres (ex : ça marchait si on enlevait les x, mais pas les y…), il y avait forcément une symétrie de la formule pour deux barreaux : on la mettait tout le temps deux fois.
En effet, lorsque la formule ne nous convenait pas, nous changions les lettres une par une, et au bout du compte, nous avions deux fois la formule pour deux barreaux en symétrie. (4)

Une fois cette symétrie constatée, nous avons trouvé du premier coup, grâce à un schéma très simple :

$$+x+y-x-y \qquad\qquad +y+x-y-x \qquad\qquad$$

les cercles correspondant à des espaces à compléter avec d’autres lettres. Et nous avons donc trouvé :

a + x + y – x – y + a + z – a – z + y + x – y – x + z + a – z.

Conclusion

Il est possible de réaliser un nœud pour n'importe quel nombre de barreaux en réitérant le procédé. (5)

Notes d’édition

(1) Légende du schéma ci-dessous : « Solution du problème pour 2 barreaux ».

(2) En toute rigueur, il s'agit d'une équivalence : « … il faut et il suffit ... ».

(3) Il aurait été intéressant de représenter graphiquement ce mot (ainsi que le mot avec 4 barreaux obtenu plus loin), comme pour le cas de 2 barreaux.

(4) Cette formule est +x-y-x-y.

(5) La conclusion est un peu hâtive : compte tenu de la description du cas de 4 barreaux, on est persuadé qu'on pourra effectivement y arriver avec un nombre quelconque de barreaux, mais cela demande un argument plus rigoureux (comme un algorithme par exemple). En particulier, la parité du nombre de barreaux pourrait jouer un rôle.