Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Le berger et ses moutons

2014-2015

Nom, prénom et niveaux des élèves : GANTET Jérémie et SELLIER François, Première S

Établissement : Lycée polyvalent Bellevue, Toulouse

Enseignant(s) : M. CARSALADE et M. GUIDINI

Chercheur(s) : MME MERCIER, Université Toulouse 2 - Jean Jaurès

Table des matières

1 Présentation du sujet

Nous allons dans ce document nous intéresser au problème isopérimétrique dans un triangle, que nous résoudrons par le biais de la géométrie et de l'analyse, puis nous élargirons au cas du quadrilatère, des polygones à n côtés et enfin au cas général d'une surface dans le plan.

Le problème auquel nous allons nous intéresser ici est le suivant :

> Un berger possède 300 m de fil barbelé et trois piquets.
>
> Comment doit-il placer ses piquets pour que ses moutons aient un maximum d'herbe à brouter ?

2 Conjectures et résultats obtenus

Afin de résoudre ce problème, nous avons dans un premier temps cherché quel était le triangle *de périmètre minimal* pour une base et une aire donnée, et nous avons montré que celui-ci était isocèle. Puis nous avons trouvé analytiquement que cette même situation donnait également le triangle *d'aire maximale* pour une base et un périmètre donné. Nous avons ensuite cherché quel type de triangle donnait la plus grande aire, et avons montré par l'absurde que le triangle équilatéral était bien la situation optimale.

3 Résolution

3.1 Un triangle de périmètre minimal pour une aire et une base données

Proposition 1
Le triangle ABC de base AB et d'aire $\mathscr{A}$ qui a le plus petit périmètre est le triangle ABC isocèle en C.

Soit un triangle ABC d'aire $\mathscr{A}$ et de base AB de longueur b fixées. Comme $\mathscr{A} = b \times h/2$, on a également h fixé.

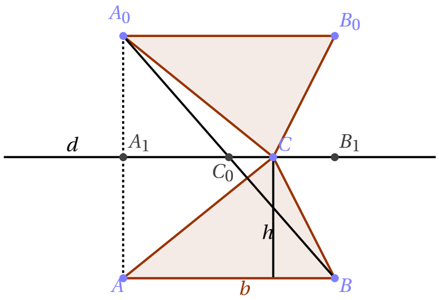

FIGURE 1 – Le chemin le plus court est le segment $[A_0B]$ (figure réalisée avec le logiciel *Geogebra*)

On cherche le point C_0 tel que ABC_0 soit de périmètre minimal. On place donc deux points A et B tels que $AB = b$ et une droite (d) parallèle à (AB) tels que les projetés orthogonaux A_1 et B_1 de A et B sur (d) soient tels que $AA_1 = BB_1 = h$. On a alors $C \in (d)$ (on restreint les solutions d'un seul côté de (AB), l'autre étant le symétrique). Soit A_0 le symétrique de A par rapport à (d) ; on a alors, par symétrie : $BC + CA = BC + CA_0$. D'après l'inégalité triangulaire, le chemin le plus court pour aller de B à A_0 est le segment $[A_0B]$ (voir Fig. 1 ci-contre), or ce segment passe par (d) en un point C_0 milieu du segment $[A_0B]$. En effet, le triangle $A_0A_1C_0$ est semblable au triangle A_0AB car $(A_1B_1)//(AB)$; et avec $A_0A_1/A_0A = 1/2$, on a, d'après le théorème de Thalès, $A_0C_0/A_0B = A_0A_1/A_0A = 1/2$.

On a donc $A_0C_0 = C_0B \Leftrightarrow AC_0 = C_0B$, qui est la configuration d'un triangle isocèle.

On en déduit que le triangle ABC de périmètre minimal pour une base AB fixée et une aire donnée est le triangle ABC isocèle en C.

Remarque Ce résultat ne nous permet pas de dire quel triangle a une aire maximale pour une base et un périmètre donnés, mais seulement qu'*il existe un triangle de même aire mais de périmètre plus petit*, si celui-ci n'est pas isocèle.

3.2 Un triangle d'aire maximale pour un périmètre et une base donnés

Proposition 2
Le triangle ABC de base AB et de périmètre P qui a la plus grande aire est le triangle ABC isocèle en C.

Soit un triangle ABC de périmètre P donné et de base AB de longueur b. On cherche un triangle tel que la hauteur issue de C soit la plus grande possible. On se place alors dans un repère orthonormal $(O; I; J)$ dans lequel les points A et B sont sur l'axe des abscisses, de coordonnées respectives $A(-b/2; 0)$ et $B(b/2; 0)$. On prend x et y pour coordonnées de C, on obtient : [1]

$$P - b = AC + CB = \sqrt{(x + b/2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - b/2)^2 + y^2}$$

On en déduit :

$$(P - b) - \sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} = \sqrt{(x + b/2)^2 + y^2}$$

En mettant l'expression au carré on obtient :

$$(P - b)^2 - 2(P - b)\sqrt{(x - b/2)^2 + y^2} + (x - b/2)^2 + y^2 = (x + b/2)^2 + y^2$$

Puis en développant et simplifiant :

$$\begin{aligned}
&(P-b)^2 - 2(P-b)\sqrt{(x-b/2)^2+y^2} + x^2 - bx + b^2/4 = x^2 + bx + b^2/4\\
\Leftrightarrow\ &(P-b)^2 - 2(P-b)\sqrt{(x-b/2)^2+y^2} - bx = bx\\
\Leftrightarrow\ &(P-b)^2 - 2bx = 2(P-b)\sqrt{(x-b/2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

On divise par $2(P-b)$ car $P > b \Leftrightarrow P-b > 0 \Rightarrow 2(P-b) \neq 0$ et on a :

$$\frac{P-b}{2} - \frac{bx}{P-b} = \sqrt{(x-b/2)^2+y^2}$$

On met alors l'expression au carré et on simplifie :

$$\begin{aligned}
&\frac{(P-b)^2}{4} - bx + \frac{b^2x^2}{(P-b)^2} = (x-b/2)^2 + y^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(P-b)^2}{4} - bx + \frac{b^2x^2}{(P-b)^2} = x^2 - bx + b^2/4 + y^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(P-b)^2}{4} + \frac{b^2x^2}{(P-b)^2} = x^2 + b^2/4 + y^2
\end{aligned}$$

On peut alors regrouper les termes comme ci-dessous :

$$x^2\left(1 - \frac{b^2}{(P-b)^2}\right) + y^2 = \frac{(P-b)^2 - b^2}{4}$$

de plus, on a :

$$(P-b) > b > 0 \Rightarrow (P-b)^2 > b^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{b^2}{(P-b)^2} > 0 \Leftrightarrow 0 < \left(1 - \frac{b^2}{(P-b)^2}\right) < 1$$

et

$$(P-b) > b > 0 \Rightarrow (P-b)^2 > b^2 \Leftrightarrow (P-b)^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(P-b)^2 - b^2}{4} > 0$$

C'est à dire une équation de la forme :

$$x^2\alpha + y^2 = \beta \ \Leftrightarrow\ \frac{x^2}{\alpha^{-1}\beta} + \frac{y^2}{\beta} = 1 \tag{1}$$

avec $1 > \alpha > 0$ et $\beta > 0$, qui est l'équation d'une ellipse (voir Fig. 2).

L'aire $\mathscr{A}$ d'un triangle de base b et de hauteur h est :

$$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$$

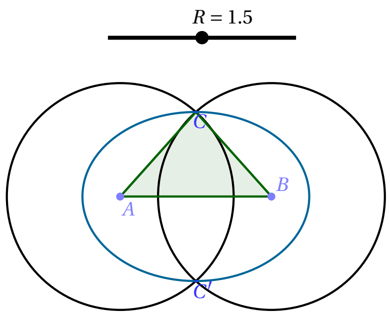

FIGURE 2 – Ellipse construite en fixant une base AB et un périmètre avec le logiciel *Geogebra*

ici, la hauteur de notre triangle est $|y|$, donc :

$$\mathscr{A} = \frac{b \times |y|}{2}$$

On sait que $|y| = \sqrt{y^2}$, donc maximiser $\mathscr{A}$ pour b fixé, c'est maximiser $|y|$, ce qui revient à maximiser $\sqrt{y^2}$, et donc à maximiser y^2. [2]

D'après (1), y^2 est maximal lorsque $x = 0$, c'est-à-dire lorsque le point C se trouve sur la médiatrice du segment $[AB]$, qui est la configuration d'un triangle isocèle en C.

On en déduit que pour un triangle ABC de base AB et de périmètre P, le triangle qui a la plus grande aire est le triangle ABC isocèle en C.

3.3 Un triangle isocèle d'aire maximale pour un périmètre donné

Comme pour un triangle ABC de base AB et de périmètre fixés, le triangle qui a la plus grande aire est le triangle ABC isocèle en C, nous allons désormais déterminer la longueur optimale de la base pour un triangle isocèle de périmètre fixé, puis nous démontrerons d'une autre façon ce résultat, par l'absurde.

> **Proposition 3**
> Le triangle ABC d'aire maximale pour un périmètre donné est le triangle équilatéral.

Solution analytique Soit un triangle ABC isocèle en C et de périmètre P fixé. On nomme b la longueur de la base AB du triangle et on calcule son aire en fonction de b sur $]0;P/2[$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(b) &= \frac{1}{2}b \times \sqrt{\left(\frac{P-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}b \times \sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{Pb}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2}b \times \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - b\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{2}}b \times \sqrt{\frac{P}{2} - b}\end{aligned}$$

Maximiser l'aire revient à maximiser le carré de l'aire, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{A}(b)\right)^2 &= \frac{P}{8}b^2 \times \left(\frac{P}{2} - b\right) \\ &= \frac{P}{8}\left(\frac{P}{2}b^2 - b^3\right)\end{aligned}$$

On cherche alors les variations de $\left(\mathscr{A}(b)\right)^2$ sur $]0;P/2[$: [3]

$$\begin{aligned}&\left(\left(\mathscr{A}(b)\right)^2\right)' \geq 0\,;\ b \in]0;P/2[\\ \Leftrightarrow\ &\frac{P}{8}\left(Pb - 3b^2\right) \geq 0\,;\ b \in]0;P/2[\\ \Leftrightarrow\ &\frac{P}{8}b(P - 3b) \geq 0\,;\ b \in]0;P/2[\\ \Leftrightarrow\ &b \in]0;P/3]\end{aligned}$$

La fonction $\left(\mathscr{A}(b)\right)^2$ est donc croissante sur $]0;P/3]$ et décroissante sur $[P/3;P/2[$, et il en est de même pour la fonction $\mathscr{A}(b)$ qui est strictement positive sur cet intervalle.

On en déduit que l'aire du triangle est maximale lorsque $b = P/3$, c'est-à-dire lorsque le triangle est équilatéral.

Démonstration par l'absurde Soit un triangle ABC non équilatéral de périmètre P qui a la plus grande aire possible pour ce périmètre. Il existe alors dans ce triangle deux côtés adjacents a et b tels que $a \neq b$, or on peut construire un triangle isocèle tel que $a' = b'$ et $a' + b' = a + b$ de périmètre égal mais dont l'aire est plus grande (voir section précédente, proposition 2), ce qui contredit l'hypothèse de départ selon laquelle ce triangle a la plus grand aire possible pour ce périmètre fixé.

Le triangle ABC, pour avoir l'aire maximale, doit donc être équilatéral ; or, il n'existe qu'une seule configuration de triangle équilatéral pour un périmètre donné ($AB = BC = AC = P/3$).

4 Conclusion

Le berger doit donc placer ses piquets de manière à créer un triangle équilatéral, de côté 100 m dans notre cas, afin que ses moutons aient un maximum d'herbe à brouter.

5 Élargissements

5.1 Un polygone à 4 côtés d'aire maximale pour un périmètre donné

Proposition 4
Le carré est le polygone à quatre côtés d'aire maximale pour un périmètre donné.

On peut montrer dans un premier temps par l'absurde que le quadrilatère d'aire maximale est un losange. Soit un quadrilatère convexe [1] qui n'est pas un losange et qui a l'aire maximale pour un certain périmètre donné. Il existe donc deux côtés [4] a et b tels que $a \neq b$, or on peut construire un autre quadrilatère tel que $a' = b'$ et $a' + b' = a + b$ dont l'aire est plus grande (voir partie triangle isocèle), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ce quadrilatère a une aire maximale.

Le quadrilatère d'aire maximale doit donc être un losange. Il existe plusieurs configurations de losanges, il faut déterminer celle qui donne l'aire maximale. L'aire d'un losange s'exprime de la forme suivante (avec α l'angle formé par l'un des côtés avec la base choisie) :

$$\mathscr{A} = b \times h = \frac{P}{4} \times h = \frac{P}{4} \times \frac{P}{4} \sin\alpha = \frac{P^2}{16} \times \sin\alpha$$

qui est maximale lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque l'angle α est droit. Un losange avec un angle droit est un carré, et il n'existe qu'une seule configuration de carré pour un périmètre donné, **c'est donc le carré qui a l'aire maximale**.

5.2 Un polygone à n côtés d'aire maximale pour un périmètre donné

On peut conjecturer que le polygone à n côtés d'aire maximale pour un périmètre donné est régulier, on se propose ici de démontrer uniquement le cas $n \in 2\mathbb{N}$.

Proposition 5
Le polygone à n côtés (n pair) d'aire maximale pour un périmètre donné est régulier.

1. un polygone concave, en effet, a toujours un équivalent convexe de même périmètre mais dont l'aire est plus grande : une partie du polygone « tournée vers l'intérieur » réduit l'aire, alors qu'une partie « tournée vers l'extérieur » augmente l'aire

Soit un polygone convexe à n côtés dont tous ne sont pas égaux et qui a l'aire maximale pour un certain périmètre donné. Il existe donc deux côtés [4] a et b tels que $a \neq b$, or on peut construire un autre polygone tel que $a' = b'$ et $a' + b' = a + b$ dont l'aire est plus grande (voir partie triangle isocèle), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ce polygone a une aire maximale.

Le polygone d'aire maximale doit donc avoir tous ses côtés égaux. Il existe néanmoins plusieurs configurations de polygones à n côtés dont tous les côtés sont égaux, en particulier quand $n > 3$. Il faut donc déterminer lesquels ont une aire maximale.

Soit un polygone équilatéral convexe à n côtés, tel que $n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$, qui a l'aire maximale pour un certain périmètre donné mais qui n'est pas inscriptible dans un cercle. On coupe le polygone avec une diagonale $[A_1A_p]$ en deux polygones de même périmètre (voir Fig. 3 page 10), et donc même aire[2].

Soit A_i un sommet du polygone, différent de A_1 et de A_p, on a alors, avec $\alpha = \widehat{A_1A_iA_p}$, l'aire du triangle : $\mathscr{A}_{A_1A_iA_p} = \frac{1}{2}A_1A_i \times A_iA_p \sin(\alpha)$ qui est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (triangle rectangle). Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, alors il est possible de construire un autre demi-polygone $A_1A_2 \cdots A_p$ tel que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, sans modifier les valeurs de A_1A_i et de A_iA_p, mais seulement celle de A_1A_p de telle sorte que $A_1A_iA_p$ ait une aire plus grande ; [5] et comme les autres sections du demi-polygone ne sont pas modifiées (les sections $A_p \cdots A_{i+1}A_i$ et $A_iA_{i-1} \cdots A_1$ peuvent rester identiques comme les longueurs des deux segments restent les mêmes), on a alors une demi-aire plus grande, et le symétrique de ce demi-polygone peut être utilisé de l'autre côté, pour former une aire totale plus grande.

Lorsqu'un polygone ne possède pas tous ses sommets sur un même cercle, il est alors possible de construire un autre polygone plus grand avec la méthode que nous venons de voir. Un polygone d'aire maximale devrait donc avoir tous ses points sur un cercle de diamètre $[A_1A_p]$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ce polygone n'est pas inscriptible dans un cercle.

Le polygone d'aire maximale doit donc être inscriptible dans un cercle, en plus d'être équilatéral, or un tel polygone existe : c'est un polygone régulier.

Remarque Nous n'avons démontré ce résultat que pour les polygones possédant un nombre pair de côtés, il reste donc le cas impair à résoudre.

5.3 L'inégalité isopérimétrique

On s'intéresse désormais au cas général d'une surface dans le plan.

Proposition 6
Le disque est la figure d'aire maximale pour un périmètre donné.

2. s'ils n'ont pas la même aire, on peut utiliser le modèle de la partie la plus grande pour construire l'autre partie, et le polygone considéré n'a donc pas l'aire maximale

Soit un polygone régulier à n côtés, de périmètre P. L'apothème h de ce polygone, c'est-à-dire la distance entre le centre du polygone et chacun des côtés, est égal à [3] :

$$h = \frac{b}{2} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{n}\right)} = \frac{P}{2n\tan(\frac{\pi}{n})}$$

L'aire du polygone est la somme des aires de tous les triangles isocèles qui le composent :

$$\mathscr{A}_n = n \times \left(\frac{1}{2} \times b \times h\right) = n \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{P}{n} \times \frac{P}{2n\tan(\frac{\pi}{n})}\right) = \frac{P^2}{4n\tan(\frac{\pi}{n})}$$

En étudiant les variations de l'aire en fonction du nombre de côtés, on doit pouvoir montrer que plus il y a de côtés à un polygone régulier, plus son aire à périmètre fixé est grande.

On a également, pour $\frac{\pi}{n} \in]0;\pi/2[$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow 4n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > 4\pi$$

d'où :

$$\frac{P^2}{4n\tan(\frac{\pi}{n})} < \frac{P^2}{4\pi}$$

qui correspond finalement à l'aire du disque :

$$\mathscr{A}_{\text{disque}} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

Le disque est la figure qui maximise l'aire, car tous les points qui le délimitent doivent faire partie d'un même cercle pour donner une aire maximale (cf. section précédente). On a ainsi A_n qui est croissant et majoré, et qui converge vers $\frac{P^2}{4\pi}$ lorsque n tend vers l'infini.

On peut donc établir l'inégalité suivante, appelée inégalité isopérimétrique, qui établit pour toute surface de périmètre P et d'aire $\mathscr{A}$:

$$\frac{P^2}{4\pi} \geq \mathscr{A} \Leftrightarrow \frac{P^2}{4\pi\mathscr{A}} \geq 1 \Leftrightarrow P^2 - 4\pi\mathscr{A} \geq 0$$

3. on se place dans un triangle isocèle ayant pour base b un côté du polygone régulier et pour sommet le centre du cercle circonscrit au polygone

6 Notes d'édition

[1] Les auteurs cherchent ici à déterminer la position possible de C par rapport aux points A et B, c'est ce qu'on appelle un problème de lieu géométrique.

[2] α et β valent ici respectivement $(1-\frac{b^2}{(P-b)^2})$ et $\frac{(P-b)^2-b^2}{4}$, qui sont fixés, donc maximiser y^2 revient à minimiser x^2, donc à minimiser x.

[3] Les variations de f sont trouvées par les auteurs en calculant le signe de sa dérivée, ici notée f' : quand la dérivée est positive, f est croissante, quand la dérivée est négative, f est décroissante.

[4] a et b sont consécutifs, comme dans la démonstration par l'absurde de la proposition 3.

[5] La construction des auteurs vise à placer le sommet A_i dans le cercle de diamètre A_1A_p.

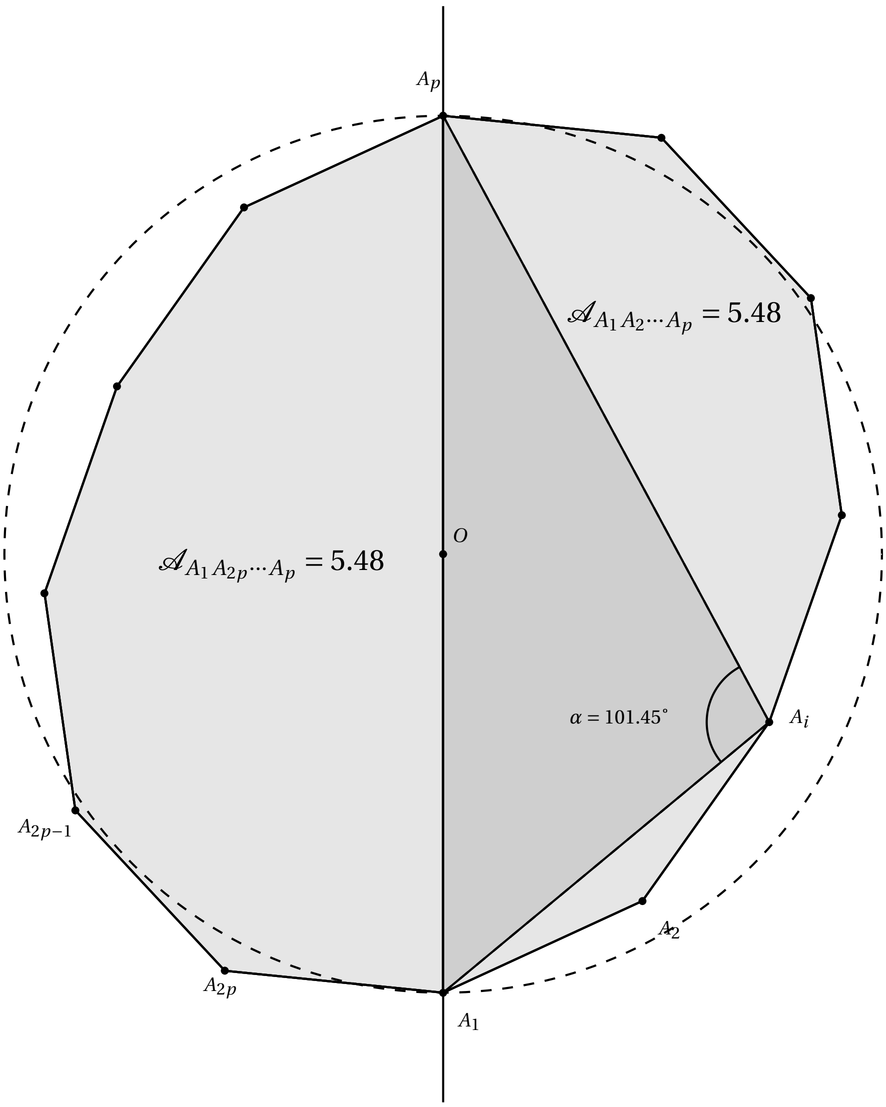

FIGURE 3 – Polygone équilatéral réalisé avec *Geogebra*