La géométrie de Pierre

Année 2013- 2014

LEGENDRE Yann et MARION Henri – 5ème
DEVOITINE Corentin et FOREST Thomas – 4ème

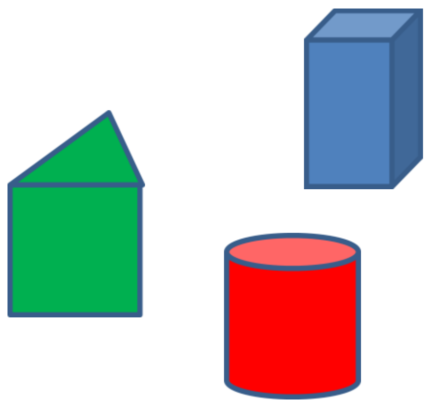
Collège G GHEPFER – Villers-lès-Nancy

Enseignantes : Mme HIRIART – Mme KUNC

Chercheuse : Anne DE ROTON – Institut Elie Cartan de Lorraine

Sujet :

Mon fils Pierre (20 mois) a un jeu de géométrie. Il se compose d’un gros cube et de 3 solides : un prisme triangulaire de base un triangle équilatéral, un parallélépipède rectangle de base un carré et un cylindre. Le gros cube a trois ouvertures. L’une des ouvertures a la forme d’un triangle équilatéral, une autre a la forme d’un carré et la dernière la forme d’un disque.
Le but du jeu est d’insérer chaque solide dans le cube en passant par l’ouverture qui lui correspond : le triangle pour le prisme à base triangulaire, le carré pour le parallélépipède, le disque pour le cylindre.

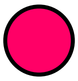


Au grand désespoir de sa maman (mathématicienne), il arrive que Pierre cherche à faire entrer le cylindre par l’ouverture triangulaire ou le parallélépipède par l’ouverture circulaire ! Heureusement, le jeu est bien conçu et Pierre n’y arrive pas !

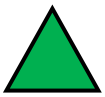
Comment faire pour que chaque volume ne puisse entrer que par l’ouverture qui lui correspond ?

Méthode :

Les dimensions des bases des solides leurs permettent tout juste de s'insérer dans les trous correspondants dans le grand cube.

Nous décidons de fixer le rayon r du trou circulaire. (1) 

1 – Nous étudierons les dimensions possibles du trou carré par rapport au rayon du disque. 

2 – Nous étudierons les dimensions possibles du trou qui a la forme d'un triangle équilatéral par rapport au rayon du disque. 

3 – Nous finaliserons en étudiant les côtés du triangle équilatéral qui restent possibles par rapport au côté du carré.

(2)

1 – Côté du carré par rapport au rayon du disque :

a) Conjecture à l'aide de GeoGebra

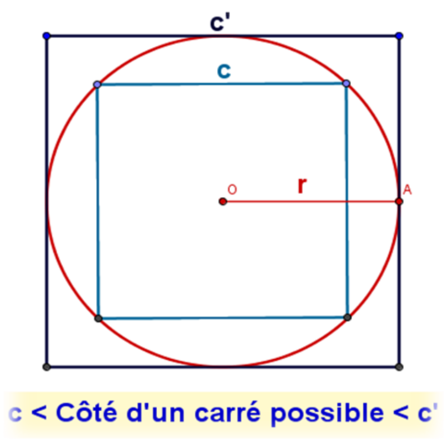
A l'aide du logiciel GeoGebra, nous avons construit la figure ci-dessous.

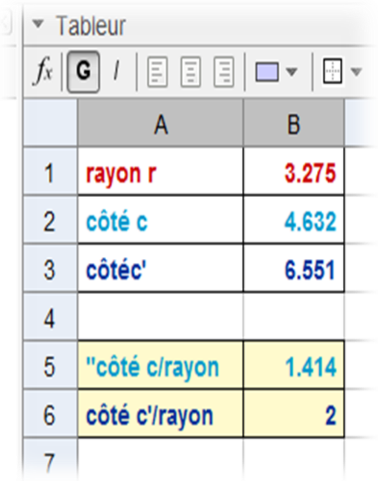
Le carré cherché ne doit pas s'insérer dans le disque et le disque ne doit pas s'insérer dans le carré.

Le côté d'un carré possible doit donc être compris entre les valeurs **c** et **c',** c étant le côté du carré inscrit dans le cercle de rayon r et c' le côté du carré dont les 4 côtés sont tangents au cercle de rayon r.

Puis nous avons fait varier le rayon r du disque, les côtés c et c' des deux carrés varient en fonction du rayon r.

En utilisant le tableur de GeoGebra, nous avons calculé les rapports c/r et c'/r et pu constater que ces rapports restaient constants : c/r ≈ 1,414 et c'/r = 2.





Tableur

	A	B
1	rayon r	3.275
2	côté c	4.632
3	côtéc'	6.551
4		
5	"côté c/rayon	1.414
6	côté c'/rayon	2
7		

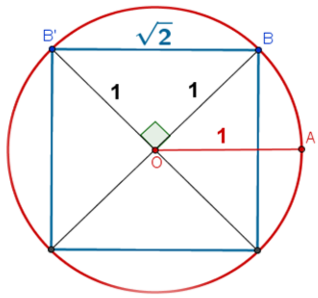
Nous avons alors déduit des valeurs approchées de **c** et **c'** en fonction de **r**.

c ≈ 1,414 × **r** et **c'** = 2 × **r**

On a alors pu conjecturer : **1,414 × r < côté d'un carré possible < 2 × r**

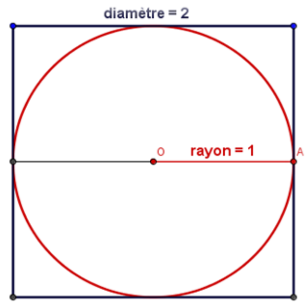
b) Démonstration

- <u>Carré inscrit dans le cercle de rayon 1:</u>



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BOB' rectangle et isocèle en O, on a :
$BB'^2 = OB^2 + OB'^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$
D'où BB' = $\sqrt{2} \approx 1{,}414$

- <u>Carré dont les 4 côtés sont tangents au cercle de rayon 1 :</u>



Le côté du carré est égal au diamètre du disque = 2.

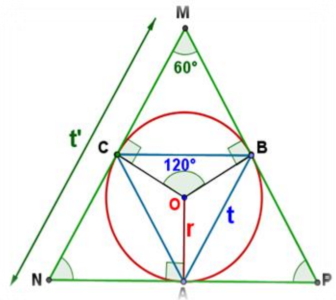
Or dans un agrandissement à l'échelle k, toutes les longueurs sont multipliées par k.
Si k est le rayon r du disque, le diamètre du disque est 2 × r et BB' = $\sqrt{2} \times r$.
On retrouve le résultat conjecturé à l'aide de GeoGebra

$\sqrt{2} \times r$ < côté d'un carré possible < 2 × r

2 – <u>Côté du triangle équilatéral par rapport au rayon du disque :</u>

a) Conjecture à l'aide de GeoGebra

Nous avons construit la figure suivante dans GeoGebra.
Le triangle équilatéral ABC, de côté **t** est inscrit dans le cercle de rayon **r**.
Le triangle équilatéral MNP, de côté **t'**, est tangent au cercle de rayon **r**.



t < côté d'un triangle équilatéral possible < t'

Le triangle cherché ne doit pas s'insérer dans le disque et le disque ne doit pas s'insérer dans le triangle.
Le côté d'un triangle possible doit donc être compris entre **t** et **t'**.
Puis nous avons fait varier le rayon r du disque, les côtés t et t' des deux triangles équilatéraux varient en fonction du rayon r.
En utilisant le tableur de GeoGebra, nous avons calculé les rapports t/r et t'/r et pu constater que ces rapports restaient constants : t/r ≈ 1,732 et t'/r = 3,464.

Tableur

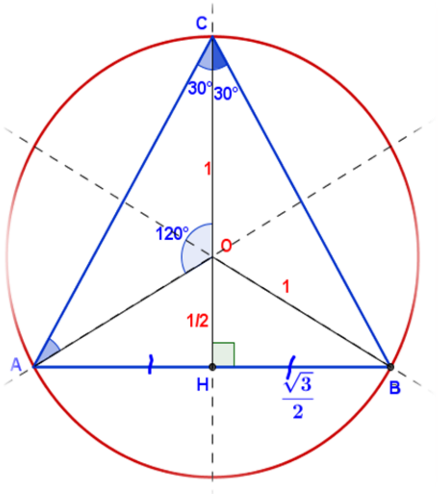
	A	B
1		
2	rayon OA	2.706
3	côté t = AB	4.687
4	côté t' =MN	9.374
5		
6	AB/OA	1.732
7	MN/OA	3.464

On a alors pu conjecturer :

1,732 × r < côté d'un triangle équilatéral possible < 3,464 × r

b) Démonstration

● Triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 1 :



▪ Le centre O du cercle est le point de concours des médiatrices des côtés.
▪ On sait que dans un triangle équilatéral, les médiatrices des côtés sont aussi les bissectrices des angles et les médianes issues des sommets. Elles sont concourantes en O.
▪ Le théorème de la droite des milieux dans un triangle nous a permis de démontrer que O se situe au 2/3 de la médiane [CH] à partir du sommet C. (voir * ci-dessous)

Ainsi si OC = 1 on a OH = $\frac{1}{2}$.

▪ Alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHB rectangle en H:

$OB^2 = OH^2 + HB^2$

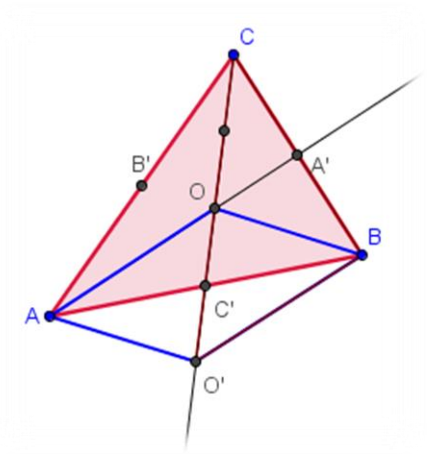
D'où $1^2 = (\frac{1}{2})^2 + HB^2$, d'où $HB^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ d'où HB = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or H est le milieu de [AB], d'où AB = 2 × HB = $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

▪ Dans un agrandissement à l'échelle r, OA = rayon du cercle = r
et AB = côté du triangle = $\sqrt{3} \times r$.

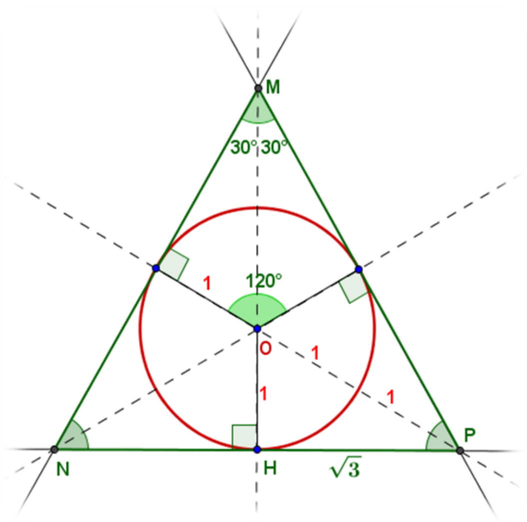
* Dans un triangle, les médianes se coupent au 2/3 de chaque médiane à partir du sommet.

Démonstration :



Dans ABC, les médianes [AA'] et [CC'] se coupent en O.
Soit O' le symétrique de O par rapport à C'.
Les diagonales [OO'] et de [AB] du quadrilatère AOBO' se coupent alors en leur milieu C'.
Par suite le quadrilatère AOBO' est donc un parallélogramme et alors ses côtés opposés sont parallèles, donc (AO) // (O'B).
Or A' étant un point de la droite (AO), on a donc: (OA') // (O'B).
Dans le triangle CO'B, la droite (OA') passe par le milieu A' du côté [BC] et est parallèle au côté [O'B], elle coupe donc le troisième côté [CO'] en sont milieu. Donc O est le milieu de [CO'].
Par suite CO = OO' = 2×OC' puisque le milieu de [OO'] est C'.
Et donc on peut en déduire que CO = $\frac{2}{3}$×CC'.

● Triangle équilatéral tangent au cercle de rayon 1 :



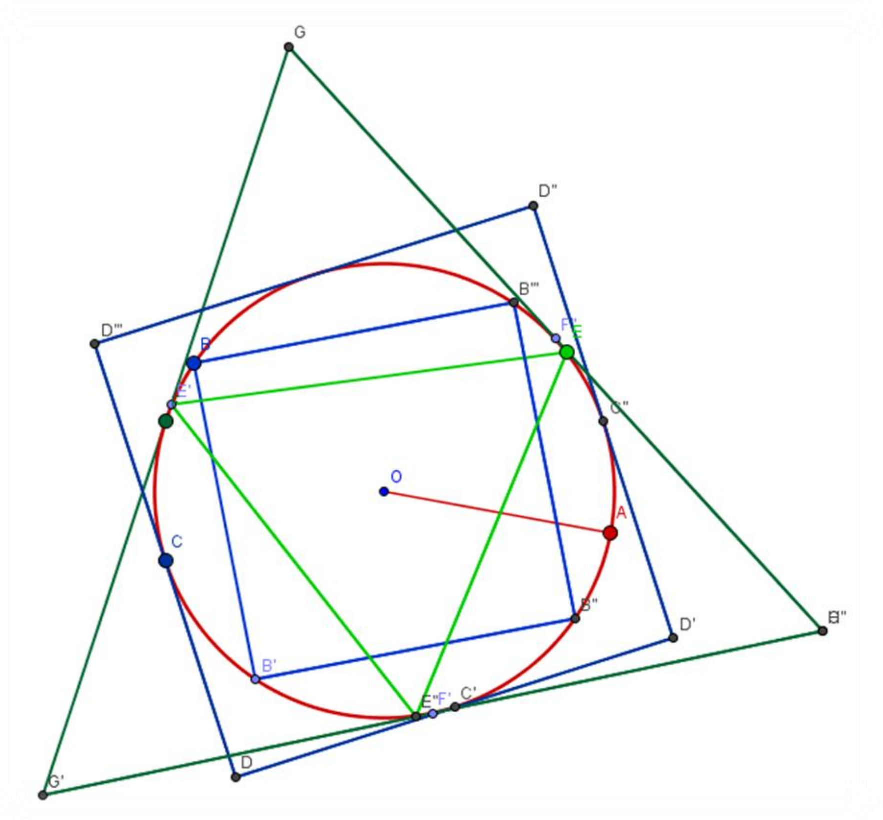
▪ Le disque est inscrit dans le triangle, son centre est le point de concours des 3 bissectrices des angles du triangle MNP.
▪ Dans le triangle équilatéral, les bissectrices des angles sont aussi les médianes issues des sommets, donc O est au 2/3 de chaque médiane à partir d'un sommet.
▪ Donc si OH = rayon du disque = 1, alors OP = 2 et dans le triangle OHP rectangle en H d'après le théorème de Pythagore : $OP^2 = OH^2 + HP^2$, d'où
$HP^2 = OP^2 – OH^2 = 2^2 – 1^2 = 4 – 1 = 3$ d'où HP = $\sqrt{3}$.
▪ Or H est le milieu de [NP], donc NP = 2 × HP
Donc NP = $2 \times \sqrt{3} \approx 3{,}464$

▪ Dans un agrandissement à l'échelle r, OH = r = rayon du cercle
et NP = côté du triangle = $2 \times \sqrt{3} \times r$

On retrouve le résultat conjecturé à l'aide de GeoGebra

$$\boxed{\sqrt{3} \times r < \text{côté d'un triangle équilatéral possible} < 2\sqrt{3} \times r}$$

Remarque :

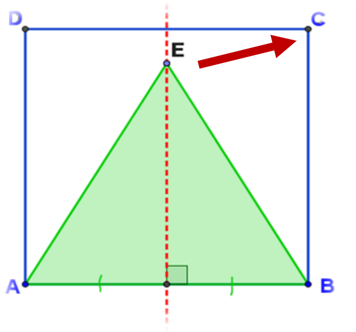


On constate alors que certains triangles possibles peuvent s'insérer dans des carrés possibles et inversement.
Par exemple, un triangle un peu plus grand que le petit triangle EE'E'' de la figure ci-contre, pourra d'insérer dans le grand carré DD'D''D'''.
Ou bien un carré un peu plus grand que le petit carré BB'B''B''' pourra s'insérer dans le grand triangle GG'G''.

Il nous faut donc étudier le côté du triangle équilatéral par rapport à celui du carré.

3 – Côté du triangle équilatéral par rapport au côté du carré :

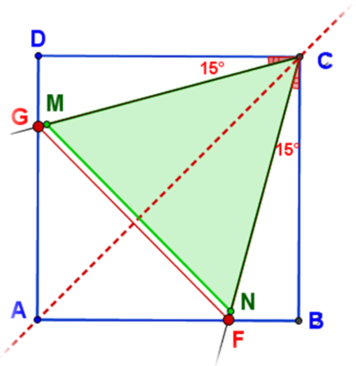
a) Plus grand triangle équilatéral dans un carré ?



Nous avons commencé par tracer la figure ci-contre.

▪ Le triangle équilatéral ABE et le carré ABCD ont même axe de symétrie et le côté [AB] en commun. Le triangle s'insère dans le carré donc il <u>ne convient pas</u>.

▪ On se dit que pour obtenir un plus grand triangle équilatéral, il faudrait que E se trouve sur un sommet du carré et que le carré et le triangle aient (AC) comme axe de symétrie.



Nous avons alors réalisé la deuxième figure.

▪ Les deux triangles équilatéraux verts sur les deux figures sont superposables, ils ont pour côté le côté du carré. On prolonge les côtés [CM] et [CN] du triangle équilatéral CMN et on note G et F les intersections avec les côtés [DA] et [BA] du carré.

On obtient le triangle CFG. Il est équilatéral car $\widehat{GCF}$ = 60° et CG = CF.

Le triangle équilatéral CFG semble être le plus grand triangle inscrit dans le carré ABCD.

▪ A l'aide de GeoGebra, nous avons vérifié que CFG est le plus grand triangle équilatéral inscrit dans le carré ABCD.

Pour cela, dans un carré, nous avons construit un triangle équilatéral dont deux sommets étaient sur deux côtés consécutifs du carré. Nous déplaçons ces sommets du triangle équilatéral sur les côtés du carré. Le plus grand triangle équilatéral inscrit dans le carré est celui de la figure ci-dessus.

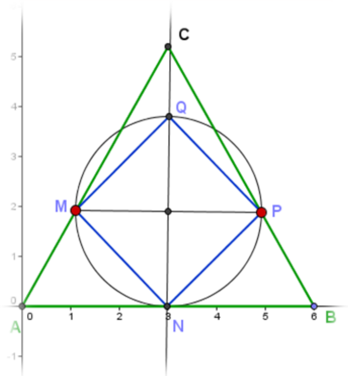
▪Dans ce cas de figure les angles $\widehat{DCG}$ et $\widehat{FCB}$ mesurent 15° $\left(\frac{90° - 60°}{2} = 15°\right)$

b) Plus grand carré dans le triangle équilatéral ?

Avec GeoGebra nous avons cherché les différentes positions que pouvait prendre un carré à l'intérieur du triangle équilatéral afin que ses dimensions soient les plus grandes possibles.

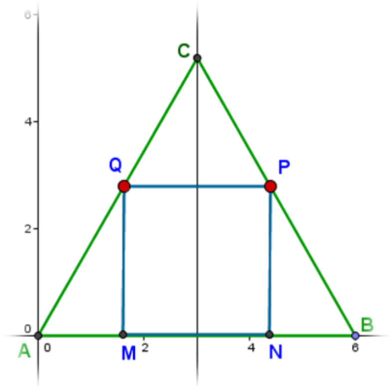
Il y a deux constructions possibles :

▪ Construction à partir des diagonales du carré et les 2 sommets opposés M et P sur 2 côtés du triangle.



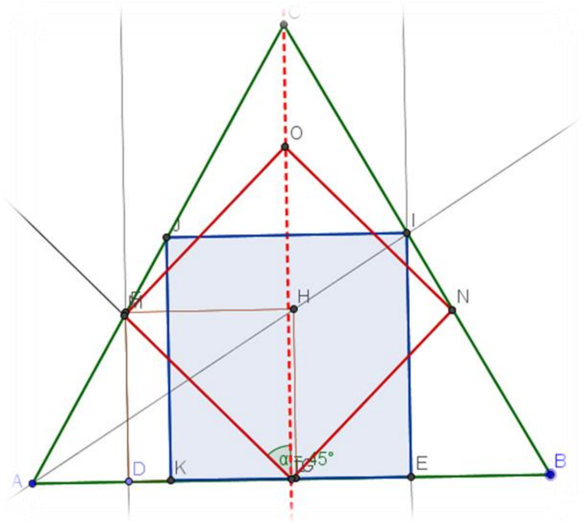
Le plus grand carré est celui obtenu quand N est au milieu du côté [AB] du triangle. (3)

▪ Construction à partir des côtés du carré et les 2 sommets consécutifs Q et P sur 2 côtés du triangle



Le plus grand carré est celui obtenu quand [MN] est sur [AB].

▪ Ensuite dans le triangle équilatéral, on a construit les 2 carrés obtenus précédemment.

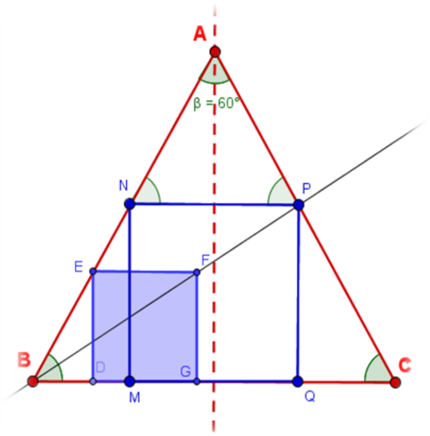


Tableur

	A	B
1		aire
2	carré bleu A1	18.88
3	carré rouge A2	17.61
4		
5	A1/A2	1.07

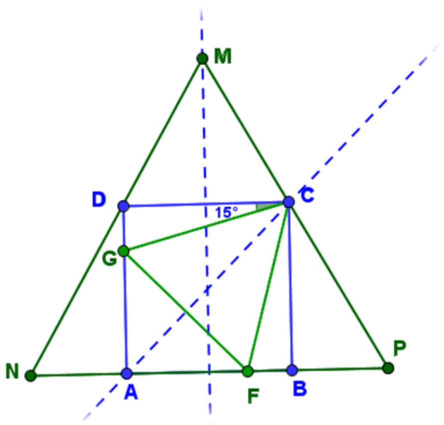
Avec GeoGebra nous trouvons que c'est le carré bleu qui est plus grand que le carré rouge en comparant leurs aires.

▪ Construction du plus grand carré inscrit dans le triangle équilatéral :



▪ On construit le petit carré DEFG avec un côté sur le côté [BC] du triangle et un sommet sur le côté [AB].
▪ On l'agrandit jusqu'à ce qu'il soit inscrit dans le triangle équilatéral ABC.
▪ On obtient le carré MNPQ qui est le plus grand carré inscrit dans le triangle équilatéral.
▪ On constate que le triangle équilatéral ABC et le carré inscrit MNPQ ont alors un axe de symétrie en commun.

c) Conjecture à l'aide de GeoGebra



On a alors construit la figure ci-contre sur GeoGebra.
ABCD est le plus grand carré inscrit dans le triangle équilatéral MNP.
CGF est le plus grand triangle équilatéral inscrit dans le carré.
Le triangle équilatéral cherché ne doit pas s'insérer dans le carré et le carré ne doit pas s'insérer dans le triangle équilatéral.
Ainsi, le côté d'un triangle équilatéral possible devra être compris entre les valeurs de CG et MN.

CG < côté d'un triangle équilatéral possible < MN

On a fait varier le côté du carré. Les côtés des triangles équilatéraux varient en fonction du côté du carré.
En utilisant le tableur de GeoGebra, nous avons calculé les rapports $\frac{GF}{AB}$ et $\frac{MN}{AB}$ et pu constater que ces rapports restaient constants : $\frac{GF}{AB} \approx 1{,}035$ et $\frac{MN}{AB} \approx 2{,}155$.
Notons c le côté du carré.

Tableur

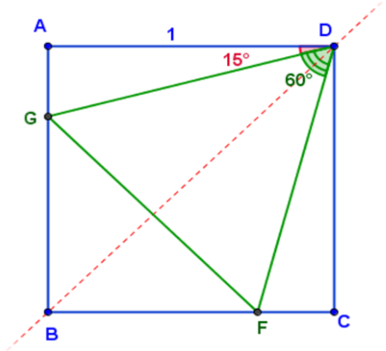
	A	B
1		
2	côté AB	5.519
3	côté GF	5.714
4	côtéMN	11.892
5		
6	GF/AB	1.035
7	MN/AB	2.155

On a alors pu conjecturer :

1,035 × c < côté d'un triangle équilatéral possible < 2,155

d) Démonstration

● Triangle équilatéral inscrit dans le carré de côté 1:

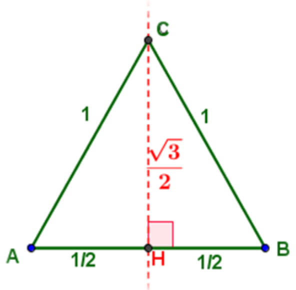


▪ Dans le triangle ADG rectangle en A:
$\cos \widehat{ADG} = \frac{AD}{GD}$, d'où cos(15°) = 1/DG d'où DG × cos(15°) = 1
et DG = $\frac{1}{\cos(15°)} \approx 1{,}035$

▪ Dans un agrandissement à l'échelle c, AD = côté du carré = c
et DG = côté du triangle = $\frac{c}{\cos(15°)}$

● Triangle équilatéral contenant exactement le carré de côté 1

►Tout d'abord, nous avons besoin du résultat suivant :

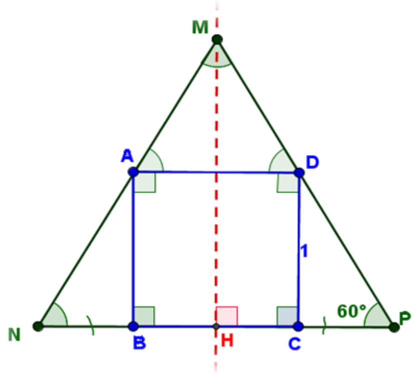


▪ Dans le triangle équilatéral de côté 1, d'après le théorème de Pythagore on a : CH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

▪ Dans un agrandissement à l'échelle t :
le côté BC du triangle équilatéral est égal à t,
HB est égale à $\frac{t}{2}$
et la hauteur CH est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} \times t$.

► Alors, soit MNP le plus grand triangle équilatéral possible de côté t.

$$MP = t,\ \ PH = \frac{t}{2}\ \ \text{et}\ \ MH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times t.$$



▪ Dans MHP, (CD) // HM), alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{PC}{PH} = \frac{CD}{HM}$ d'où $\frac{PC}{\frac{t}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} \times t}{2}}$

D'où on peut en déduire que $PC = \frac{\frac{t}{2}}{\frac{\sqrt{3} \times t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

▪ Alors puisque NB = PC et BC = 1, on obtient : $NP = BC + 2 \times PC = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}155$

▪ Dans un agrandissement à l'échelle c , CD = côté du carré = c

et NP = côté du triangle = $c \times (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})$

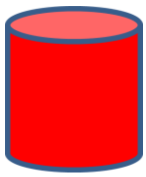
On retrouve alors le résultat conjecturé à l'aide de GeoGebra

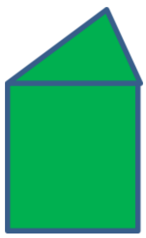
$$\frac{c}{\cos(15°)} < \textbf{côté d'un triangle équilatéral possible} < (1 + \frac{2}{\sqrt{3}}) \times c$$

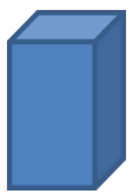
Conclusion :

Finalement, si **r est le rayon du disque, <u>r fixé</u>**, pour que le jeu soit bien conçu pour Pierre, il faut que **le côté c du carré** et **le côté t du triangle équilatéral** vérifient les 3 inégalités suivantes :

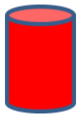
$$\begin{cases} \sqrt{2} \times r < c < 2 \times r \\ \sqrt{3} \times r < t < 2 \times \sqrt{3} \times r \\ \frac{c}{\cos(15°)} < t < (1+\frac{2}{\sqrt{3}}) \times c \end{cases}$$







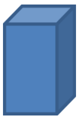
Exemple : **si on choisit** **r = 4cm**



Il faut : $\sqrt{2} \times r < c < 2 \times r$

soit : **5,7cm < c < 8 cm**

On peut choisir



c = 6cm | **c = 7,5cm**

Il faut : $\begin{cases} \sqrt{3} \times r < t < 2 \times \sqrt{3} \times r \\ \dfrac{c}{\cos(15°)} < t < \left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \times c \end{cases}$

Ce qui donne si r = 4cm et c = 6cm :

$\begin{cases} 7cm < t < 13{,}8cm \\ 6{,}3cm < t < 12{,}9cm \end{cases}$

Il faut donc : 7cm < t < 12,9 cm

On peut choisir t = 8cm

Les dimensions r = 4cm, c= 6cm et t = 8cm conviennent pour un jeu bien conçu.

Ce qui donne si r = 4cm et c = 7,5cm

$\begin{cases} 7cm < t < 13{,}8cm \\ 7{,}8cm < t < 16{,}1cm \end{cases}$

Il faut donc 7,8cm < t < 13,8cm

On peut choisir t = 9cm

Les dimensions r = 4cm, c = 7,5cm et t = 9cm conviennent pour un autre jeu bien conçu.

En conclusion :

Nous pouvons vérifier par le calcul si les dimensions d'un jeu sont correctes ou non.
Et nous sommes capables de construire autant de jeux corrects que nous voulons.

Notes d'édition

(1) De manière plus précise, le rayon du trou circulaire est désormais noté r, mais la valeur de r va être amenée à varier.

(2) Comme expliqué plus tard, étudier les dimensions possibles d'un trou par rapport à celles d'un autre signifie étudier les dimensions respectives que peuvent prendre ces 2 trous afin que seul le volume correspondant à chaque trou puisse être inséré dans celui-ci.

(3) Notons qu'énoncée ainsi, cette affirmation est incorrecte : le carré dessiné dans la colonne de droite est plus grand que celui de gauche, et satisfait pourtant bien les conditions de la première construction (les sommets opposés M et P sont sur 2 côtés du triangle). Cela ne change cependant rien aux résultats qui suivent.