La fausse pièce

[Année 2015- 2016]

Élèves : Desalle Zoë, Rosès Lisa

Établissement : Collège de Marciac (Collège de Grammat)

Professeurs : De Nodrest Edelyne, Pignon Christophe

Chercheuse : Agnes Lagnoux Université Jean Jaurès

La fausse pièce est tombée dans le coffre à trésor, rempli de pièces toutes identiques. On reconnaît la fausse pièce uniquement au fait qu'elle est plus lourde que les autres. Quelle stratégie peut on mettre en place pour la retrouver facilement ?
Nota : On a une balance à plateau à notre disposition.

Dans nos recherches « facilement » veut dire rapidement et l'on pense qu'il faut faire le moins possible de pesées pour trouver la fausse pièce rapidement.

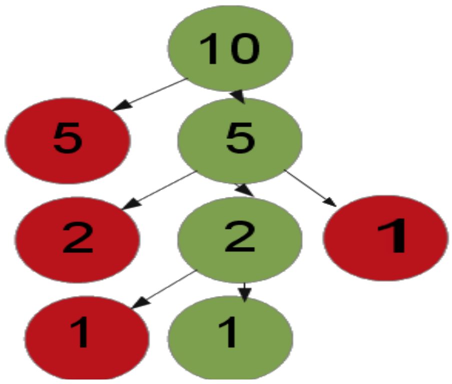
Annonce des conjectures et résultats obtenus

1-Un résultat obtenu :
Quand on divise par 2 à chaque fois on sait dire à l'avance combien de pesées maximum il faudra pour retrouver la fausse-pièce.

2-Une conjecture:
On pense qu'il faut diviser par 2 à chaque fois pour trouver le plus facilement possible le nombre de pesées mais on n'en est pas sûr.

Développement [1]

Si notre coffre contient 10 pièces, on le divise en 2 et on obtient donc 2 tas de 5 pièces, on place chaque tas sur un plateau et on garde le plus lourd. Cette étape nécessite une pesée.
On prend le tas de 5 pièces restant et on le divise à nouveau par 2 mais on ne peut pas couper une pièce en 2. Dans ce cas, on fait donc 3 tas : 2 tas de 2 pièces et 1 tas de 1 pièce. On met les 2 tas égaux sur la balance. Soit les 2 tas pèsent pareil et dans ce cas la fausse pièce est celle qui est à part. Soit un des 2 tas pèse plus lourd que l'autre et dans ce cas, c'est le tas le plus lourd qui contient la fausse pièce. Dans les 2 cas, cela nous fait une pesée.



Comme nous partons du principe que l'on est malchanceux (puisque nous cherchons le nombre maximum de pesées), nous nous placerons toujours dans le deuxième cas, nous écarterons toujours la pièce en trop et nous garderons le tas restant.
On divise ce tas en 2 et nous obtenons 2 tas de 1 pièce. Il nous faut une pesée pour savoir laquelle est la fausse. Cela nous fait donc, dans tous les cas, 3 pesées en tout pour trouver la fausse pièce parmi les 10.

Donc, il suffit de diviser par 2 le nombre de pièces à chaque étape.

Par exemple si notre coffre contient 4926 pièces il va falloir faire :
4926 : 2 = 2463 -> 1 **p**
(2463-1) : 2 = 1231-> 1 **p**+1 **p** = 2 **p**
(1231-1):2 = 615 -> 2 **p**+1 **p** = 3 **p**
(615-1):2 = 307 -> 3 **p**+1 **p** = 4 **p**
(307-1):2 = 153 -> 4 **p**+1 **p** = 5 **p**
(153-1):2 = 76 -> 5 **p**+1 **p** = 6 **p**
76:2 = 38 -> 6 **p**+1 **p** = 7 **p**
38 :2 = 19 -> 7 **p**+1 **p** = 8 **p**
(19-1):2 = 9 -> 8 **p**+1 **p** = 9 **p**
(9-1):2 = 4 -> 9 **p**+1 **p** = 10 **p**
4 :2 = 2 -> 10 **p**+1 **p** = 11 **p**
2 :2 = 1 -> 11 **p**+1 **p** = 12 **p**

(p = pesée)

Question : quand est-ce que le nombre de pesées change ?

Nous avons essayé de trouver à partir de quel nombre, le nombre de pesées changeait. Comme nous prenons le nombre puis le divisons par 2 à chaque fois, nous avons essayé de faire le contraire, donc multiplier.
Exemple :
2x2x2x2=16
2x2x2x2x2=32
Donc, on en déduit que de 16 à 31 pièces il nous faut 4 pesées (car nous avons fait 4 fois 2x2x2.... [2]), et à partir de 32 pièces il faudra au minimum 5 pesées.
Nous avons donc obtenu le tableau suivant :

Puissances de 2	Résultat	Conclusion
2	2	Donc, pour 1, 2 ou 3 pièces il faut 1 pesée
$2^2=2\times2$	4	Donc, de 4 à 7 pièces il faut 2 pesées
$2^3=2\times2\times2$	8	Donc, de 8 à 15 pièces il faut 3 pesées
$2^4=2\times2\times2\times2$	16	Donc, de 16 à 31 pièces il faut 4 pesées
$2^5=2\times2\times2\times2\times2$	32	Donc, de 32 à 63 pièces il faut 5 pesées
$2^6=2\times2\times2\times2\times2\times2$	64	Donc, de 64 à 127 pièces il faut 6 pesées

$2^7=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$	128	Donc, de 128 à 255 pièces il faut 7 pesées
…		

Conclusion : [3]

Par exemple, si on nous donne 841 pièces, pour trouver le nombre de pesées maximum avec cette méthode on fait :

$2^7=128$
$2^8=256$
$2^9=512$
$2^{10}=1024$

$2^9\leq 841<2^{10}$ donc, pour 841 pièces il faut 9 pesées

Nous avons ensuite fait un tableur : [4]

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de pièces	Nombre de tas	Nombre de pièce par tas	pièces qui restent	nombre de tas totaux	nombre pesée tas	Nombre total de pesées
2	310	4	77	2	5	2	2
3	77	4	19	1	5	2	4
4	19	4	4	3	5	2	6
5	4	4	1	0	4	2	8
6	1	4	0	1	1	0	8
7	1	4	0	1	1	0	8
8	1	4	0	1	1	0	8
9	1	4	0	1	1	0	8
10	1	4	0	1	1	0	8
11	1	4	0	1	1	0	8
12	1	4	0	1	1	0	8
13	1	4	0	1	1	0	8

Dans la case A2, nous mettons le nombre de pièces initial.
Dans la colonne B, nous mettons le nombre par lequel nous voulons diviser notre tas de pièce.
Dans la colonne C, le tableur calcule le nombre de pièces qu'il y aura dans chaque tas complet. Ainsi, dans la case C2, on rentre la formule =QUOTIENT(A2;B2)
Dans la colonne D, le tableur calcule le nombre de pièces qu'il reste si on ne peut diviser le nombre de pièces de départ en un nombre rond. On rentre donc dans la case D2 la formule =A2−B2*C2 .
Dans la colonne E, le tableur calcule le nombre de tas totaux, c'est à dire le nombre que le tableur a calculé dans la case C2 et D2 (ex : si on a 310 pièces divisées en 4 tas, il y aura 4 tas complet de 77 pièces chacun et 2 pièces restantes : ce qui fera donc 5 tas en tout). Le ontenu de la case E2est donc :
=SI(C2=0;1;SI(D2=0;B2;B2+1))
Dans la colonne F, le tableur calcule le nombre de pesées nécessaires pour trouver la fausse pièces parmi le nombre de tas de la case E2. =ARRONDI.INF(SI(E2=1;A2;E2)/2)
Dans la colonne G, on additionne le nombre de pesées effectués jusqu'à maintenant. On met donc dans la case G2 : =F2 [5]

Ensuite, dans la colonne A, on prend le tas où il y a le plus de pièces et on recommence les calculs.

=MAX(C2;D2)

Le nombre de pesées maximum se lit sur la ligne où il y a le premier 0 dans la colonne C (ex sur l'image : le nombre de pesées total se lit dans la ligne 6. 8 pesées pour cet exemple).

Conclusion

Grâce à ces démarches et en faisant varier les données dans le tableur, on pense qu'il faut diviser par 2 le nombre de pièces à chaque fois pour trouver le nombre de pesées minimum mais nous ne l'avons pas démontré.

Notes d'édition :

[1] Les auteurs décrivent ici une méthode permettant de retrouver à coup sûr la fausse pièce de monnaie, et évaluent le nombre maximal de pesées qui seront nécessaires pour y arriver.

[2] Cette formulation n'est pas très claire.

[3] L'exemple, même s'il est probant ne constitue pas une conclusion. On pourrait par exemple dire : si n désigne le nombre de pièces, l'algorithme que l'on vient de décrire permettra de retrouver la fausse pièce en k pesées, où k est le nombre vérifiant $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

[4] La feuille de calcul présentée ci-dessous permet de rentrer ne nombre de pièce total, le nombre de paquets que l'on choisit de peser deux à deux à chaque étape, et calcule le nombre de pesées qui seront nécessaires pour déterminer la fausse pièce avec cette méthode.
La description de cette feuille de calcul est un peu trop succincte, et certaines formules auraient mérité des explications.

[5] Précisons que dans les cellules en dessous, il faudra rentrer une formule qui fait la somme ; ainsi dans la case F3, il y aura la formule = E3 + F2