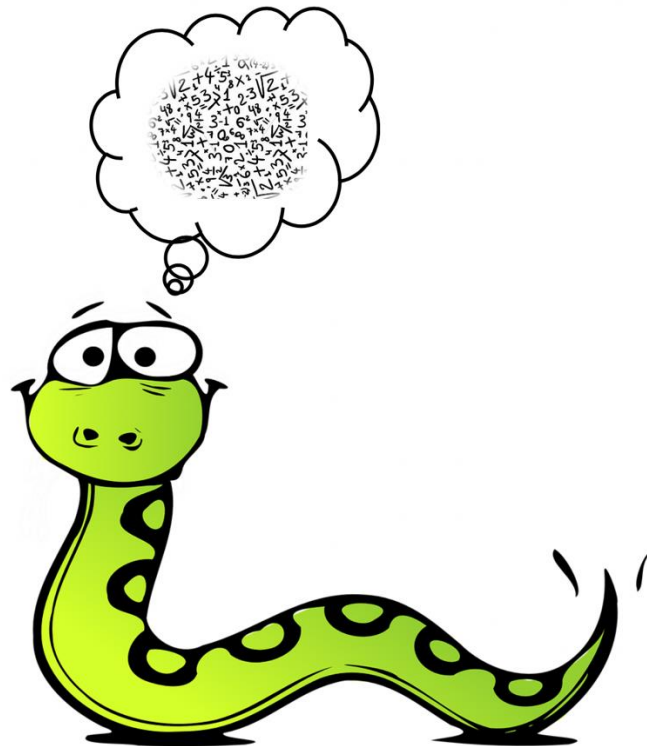


# La couverture du Serpent

Année : 2019-2020

Safa A & Solène D & Stella F & Virgile G & Perrine V & James G  
Elèves de 4<sup>e</sup> et TS du lycée van Gogh de La Haye (Pays-Bas)



Encadrés par : Mme Boissonnet, M Buchwald et Mme Decool

Chercheur : Rogier Bos, chercheur à l'université d'Utrecht et membre de MERIA

## Mise en situation :

Un petit serpent de 15 centimètres de long à froid lorsqu'il dort la nuit.

Son maître veut alors lui tricoter une couverture. Cependant il n'a pas beaucoup d'argent et il veut donc lui tricoter la plus petite couverture possible.

On note que le petit serpent peut se torde dans tous les sens et n'a pas de largeur et que la couverture peut être bougée à n'importe quel moment pour couvrir le serpent.

## Problématique :

Il nous est demandé de trouver la forme de la couverture afin que son aire soit minimale.



# Table des matières

|             |                                                                       |           |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I.</b>   | <b><i>Un état des lieux.....</i></b>                                  | <b>3</b>  |
| A)          | Les données de l'énoncé .....                                         | 3         |
| B)          | La demande et les contraintes.....                                    | 3         |
| <b>II.</b>  | <b><i>Premières réflexions .....</i></b>                              | <b>4</b>  |
| A)          | La couverture initiale : un carré .....                               | 4         |
| B)          | Seconde idée : un rectangle .....                                     | 4         |
| C)          | Troisième idée : le disque .....                                      | 4         |
| D)          | La première réduction : du disque au demi-disque .....                | 5         |
| <b>III.</b> | <b><i>Le serpent en pixels .....</i></b>                              | <b>6</b>  |
| A)          | Explication de la méthode .....                                       | 6         |
| B)          | Succession de tests avec différentes tailles .....                    | 7         |
| C)          | Observation : Une forme qui revient .....                             | 9         |
| D)          | Avec un serpent de 15 pixels .....                                    | 9         |
| <b>IV.</b>  | <b><i>Un programme avec « Scratch ».....</i></b>                      | <b>10</b> |
| <b>V.</b>   | <b><i>Quelques pistes non concluantes.....</i></b>                    | <b>12</b> |
| A)          | Recherche avec GeoGebra .....                                         | 12        |
| B)          | Le mouvement du serpent : une fonction ?.....                         | 13        |
| <b>VI.</b>  | <b><i>Vers le concept de la demi-ellipse .....</i></b>                | <b>14</b> |
| A)          | Introduction.....                                                     | 14        |
| B)          | Première idée .....                                                   | 15        |
| C)          | Deuxième idée : le serpent « en cercle ».....                         | 16        |
| D)          | Troisième idée : Le serpent se plie avec un angle de <b>60°</b> ..... | 16        |
| E)          | Quatrième idée.....                                                   | 17        |
| <b>VII.</b> | <b><i>Conclusion.....</i></b>                                         | <b>18</b> |



# I. Un état des lieux

## A) Les données de l'énoncé

Après avoir pris connaissance du sujet et des demandes nous avons fait un état des lieux des données de l'énoncé.

On sait alors que :

- Le serpent fait 15 cm de long
- Le serpent n'a aucune largeur donc il est représenté par une ligne
- Le serpent peut prendre toute forme possible tant qu'il fait 15 cm de long et qu'il ne se divise pas en morceaux
- La couverture peut être bougée à tout instant

## B) La demande et les contraintes

On note ensuite la demande et les contraintes à suivre.

La demande et les contraintes sont :

- Trouver une forme de la couverture du serpent
- L'aire de la couverture doit être minimale
- Le serpent doit être entièrement recouvert par la couverture

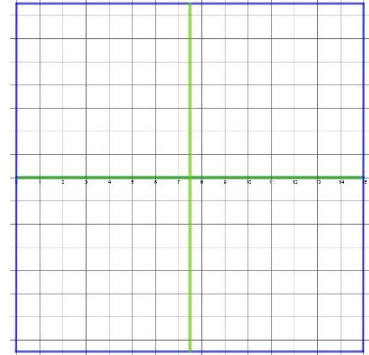


## II. Premières réflexions

### A) La couverture initiale : un carré

Notre toute première réflexion fût celle d'un carré de 15 cm sur 15 cm

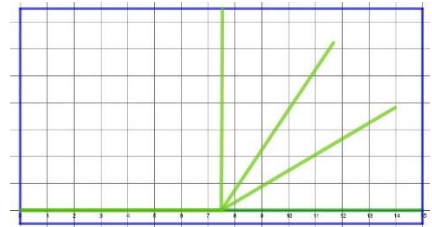
On s'est vite rendu compte que la couverture pouvait recouvrir le serpent dans toutes les positions mais elle était trop grande.



### B) Seconde idée : un rectangle

Pour réduire la couverture, nous avons pensé à un rectangle de 15 cm sur 7,5 cm

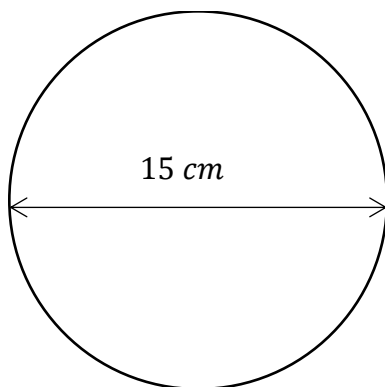
Mais de nouveau, la couverture pouvait recouvrir le serpent dans toutes les positions mais elle était toujours trop grande.



### C) Troisième idée : le disque

Nous avons décidé de suivre une stratégie qui part de la plus grande surface possible en réduisant l'aire de la couverture au fur et à mesure de nos recherches.

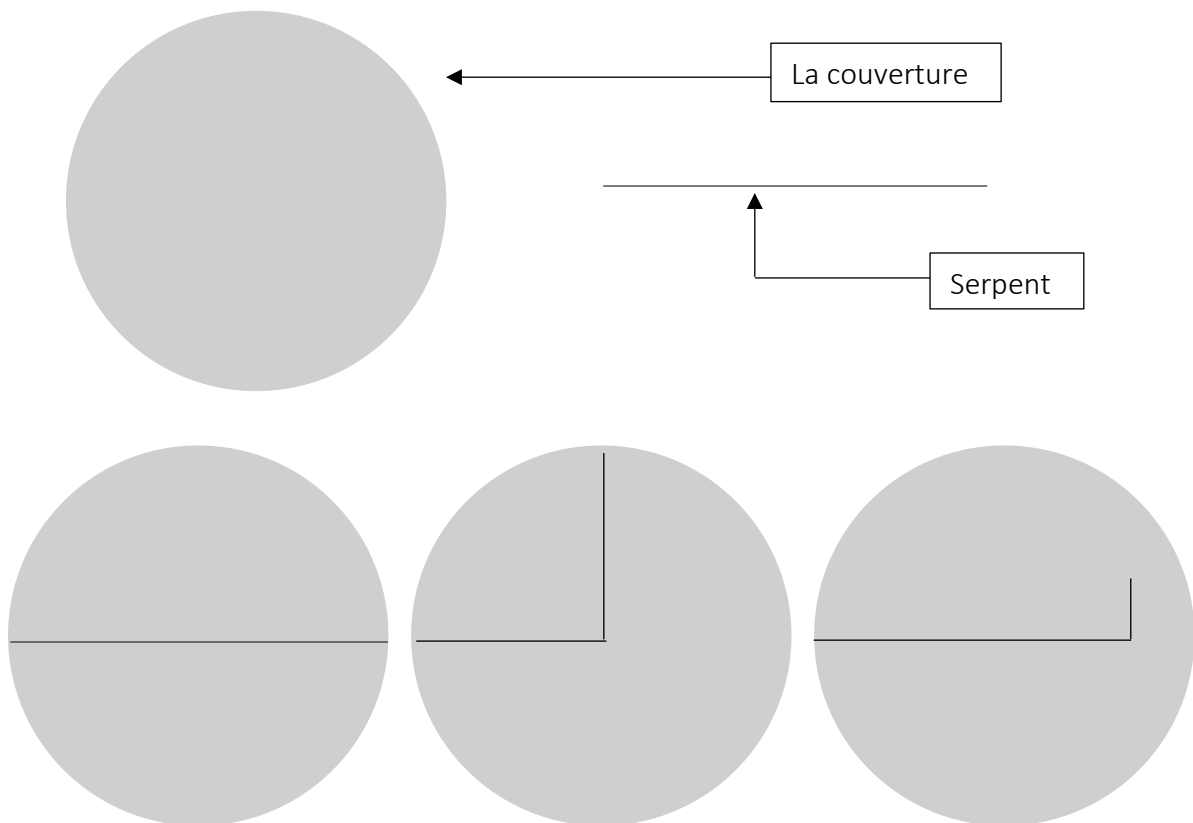
On a un serpent de longueur  $l = 15 \text{ cm}$  on prend donc pour forme initiale un disque de diamètre  $d = 15 \text{ cm}$ .



Le serpent ayant une longueur fixe il ne peut donc pas être plus long que sa longueur initiale.

Si le serpent se plie sa longueur diminue donc il peut être recouvert par le disque initial.

Voici quelques exemples schématisés :



#### D) La première réduction : du disque au demi-disque

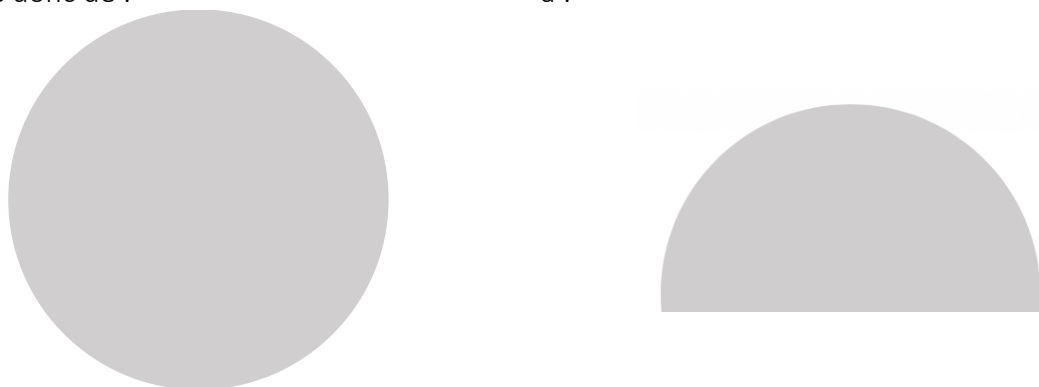
Après être partie d'une couverture représentée par un disque de diamètre correspondant à la longueur du serpent. On se rend compte que dès lors que le serpent se tord ou prend une forme autre que la ligne droite il peut rentrer dans un demi-disque.

Le serpent prend deux formes qui sont les plus importantes pour le début de ce raisonnement :

- Le serpent ne se plie pas : la couverture doit donc avoir une partie qui fait 15 cm de long
- Le serpent se plie en deux avec un angle de  $\alpha = 90^\circ$ , il est donc composé de deux parties reliées de longueur  $l' = 7,5cm$  : la couverture doit donc avoir une hauteur de  $h = 7,5cm$  au milieu de sa longueur.

On passe donc de :

à :

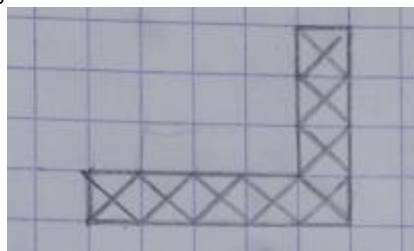
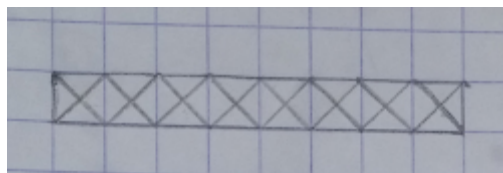


### III. Le serpent en pixels

#### A) Explication de la méthode

Nous avons ensuite décidé de modéliser le serpent en pixel.

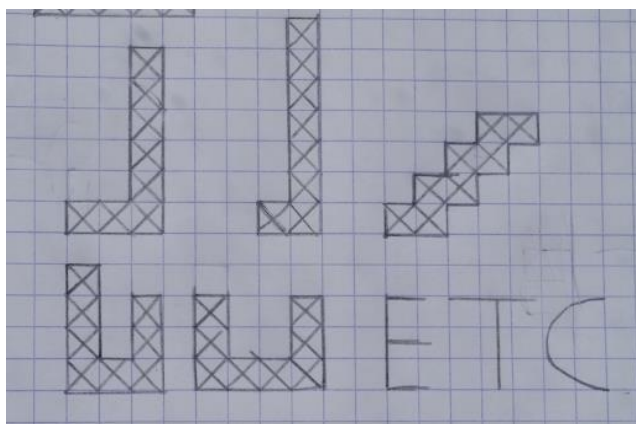
Exemple : Voici une rangée de 8 pixels (1 pixel = 1 carreau) qui représente un serpent.  
Le serpent peut avoir des formes différentes tout en gardant le même nombre de cases.



Il faut donc que nos pixels se suivent, sans se détacher (comme sur l'image ci-dessous).



Pour nous rapprocher de la couverture de notre serpent nous devons en imaginer toutes les formes possibles.



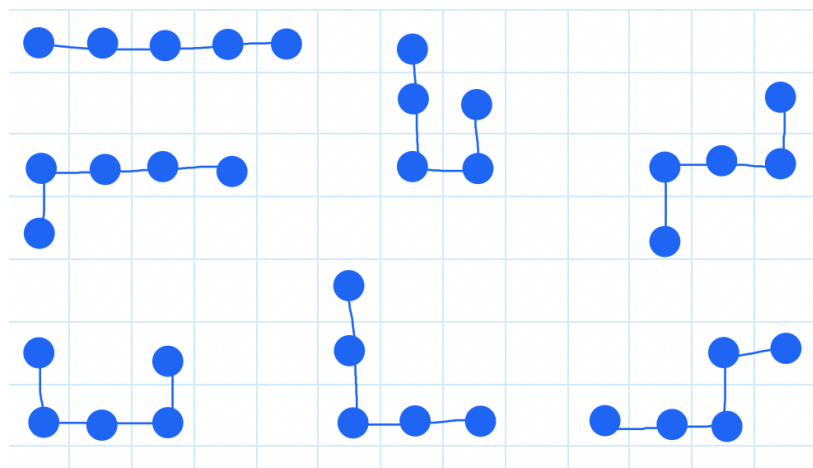
Après avoir trouvé toutes les possibilités, on va les regrouper et créer la forme la plus petite possible pouvant abriter tous les pixels.



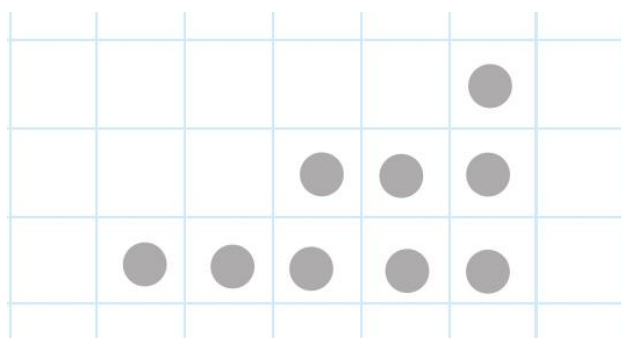
## B) Succession de tests avec différentes tailles

On commence par la plus simple :

Un serpent de 5 pixels

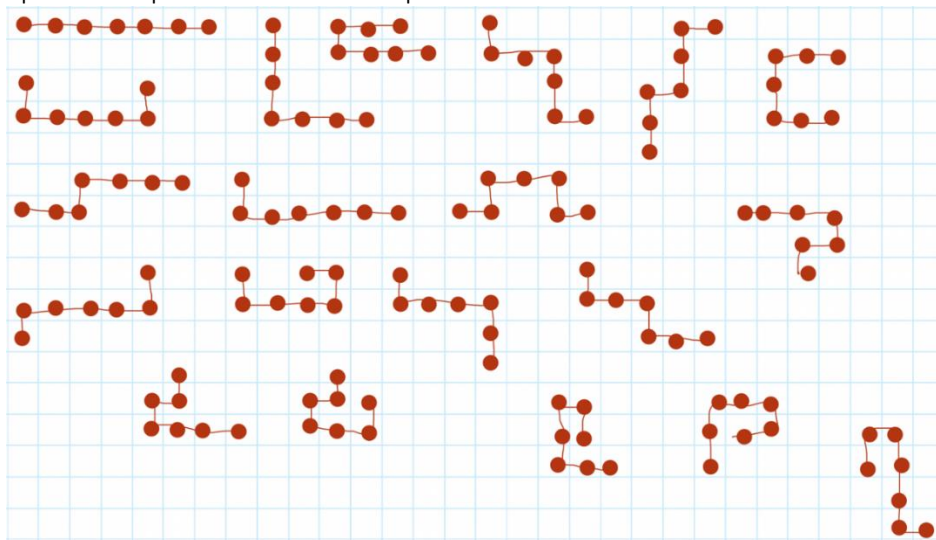


Après avoir trouvé toutes les positions que pouvait prendre un serpent de 5 pixels nous avons obtenu la couverture suivante :

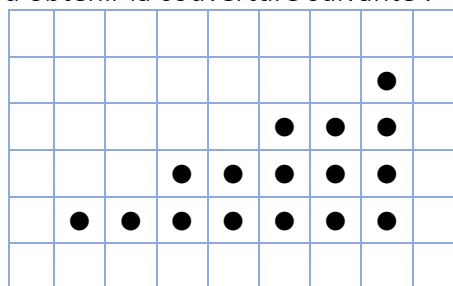


### Un serpent de 7 pixels

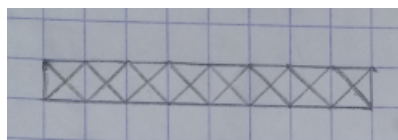
Avec un serpent de 7 pixels on trouve les positions suivantes :



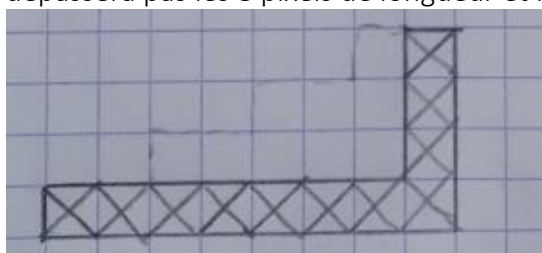
Ce qui nous permet d'obtenir la couverture suivante :



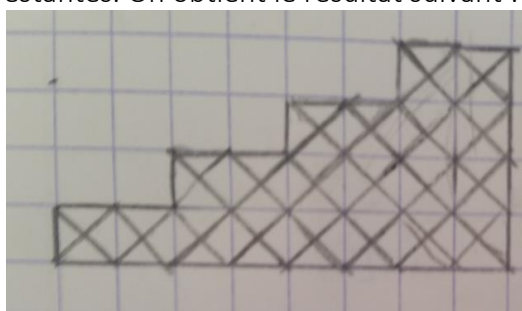
### Un serpent de 8 pixels



Logiquement la forme ne dépassera pas les 8 pixels de longueur et les 4 pixels de hauteur.



Puis on ajoute les formes restantes. On obtient le résultat suivant :

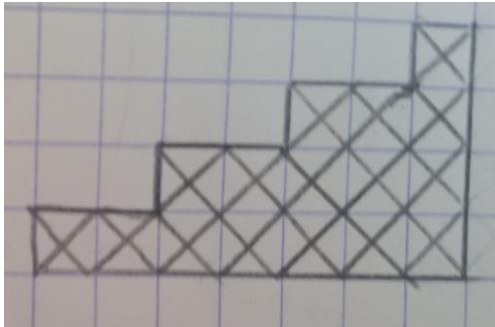


### C) Observation : Une forme qui revient

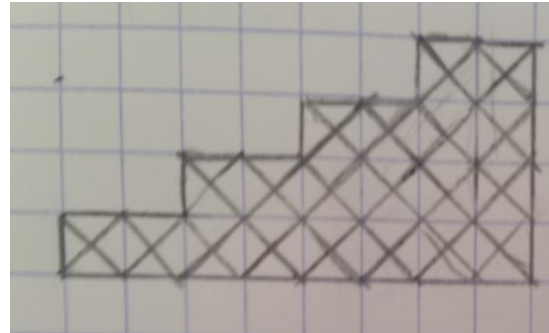
Nous avons constaté que :

- si la longueur du serpent est paire :  $2n$  , on aura un escalier de longueur  $2n$ , et dont la marche la plus haute sera constituée de  $n$  pixels (sur deux rangées)
- si la longueur du serpent est impaire :  $2n+1$  , on aura un escalier de longueur de  $2n+1$  et dont la marche la plus haute sera constituée de  $n+1$  pixels (sur une rangée)

7 pixels

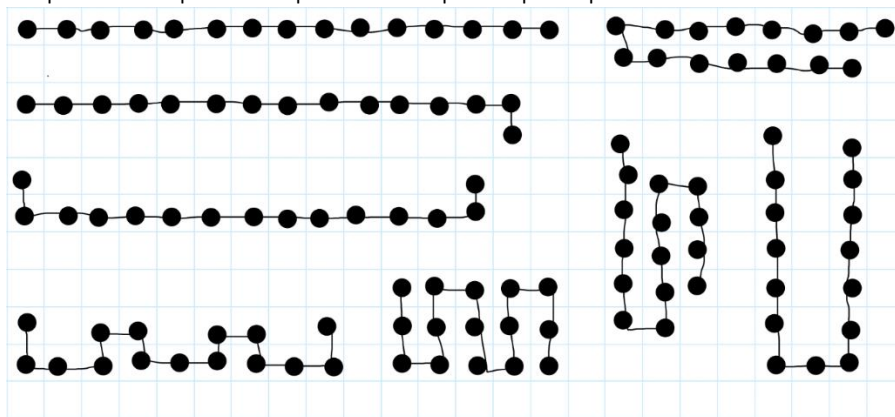


8 pixels

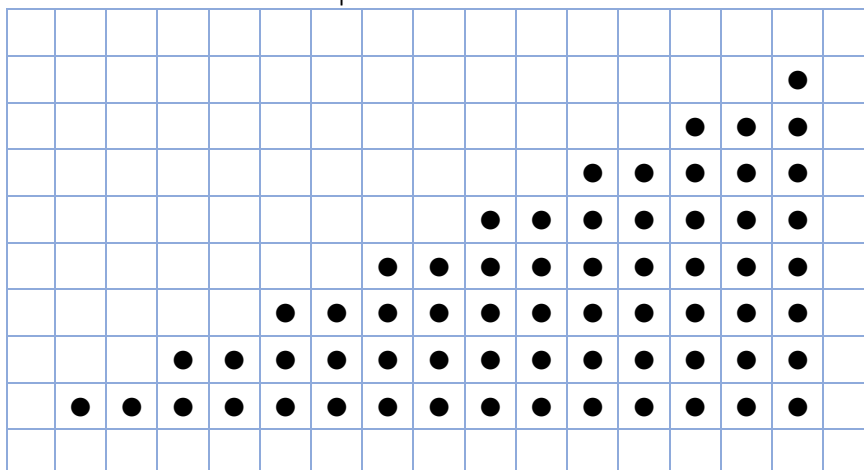


### D) Avec un serpent de 15 pixels

Voici quelques positions que le serpent de 15 pixels peut prendre :



En suivant le même raisonnement précédent on trouve alors la couverture :

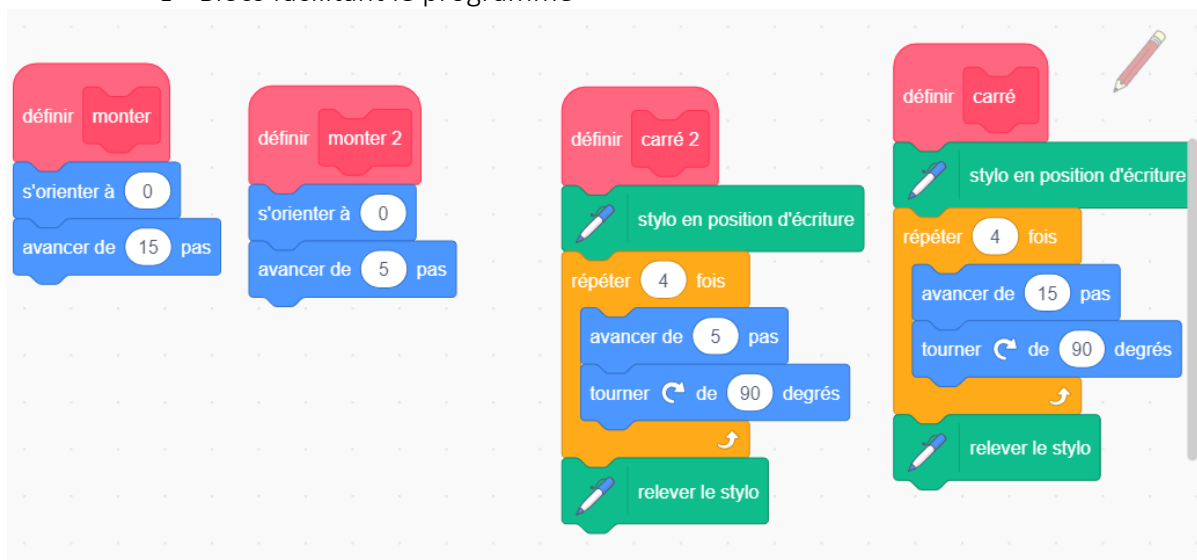


## IV. Un programme avec « Scratch »

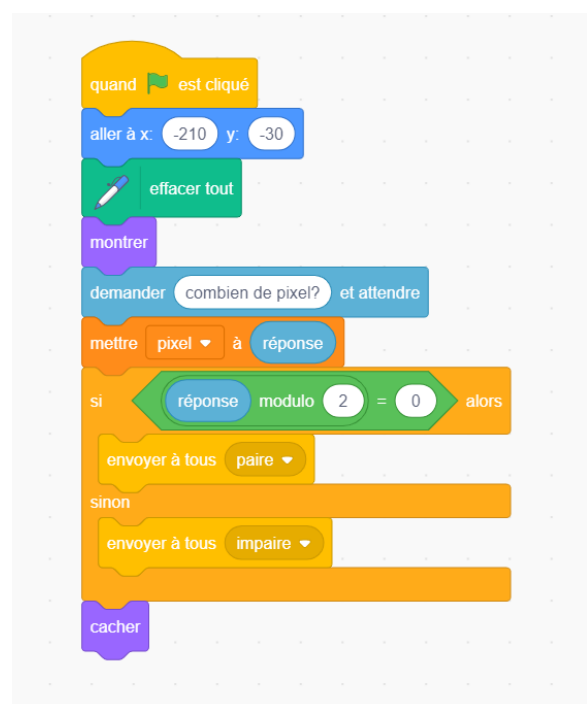
Le groupe des collégiens a continué ses recherches en modélisant la couverture du serpent à l'aide d'un programme effectué sur « scratch »

Voici ci-dessous les captures d'écran de l'évolution du programme :

➔ Blocs facilitant le programme

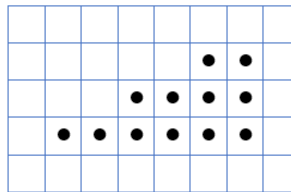


➔ Programme principal qui va envoyer des instructions différentes en fonction de la parité (pair ou impair) du nombre de pixels donné par l'utilisateur

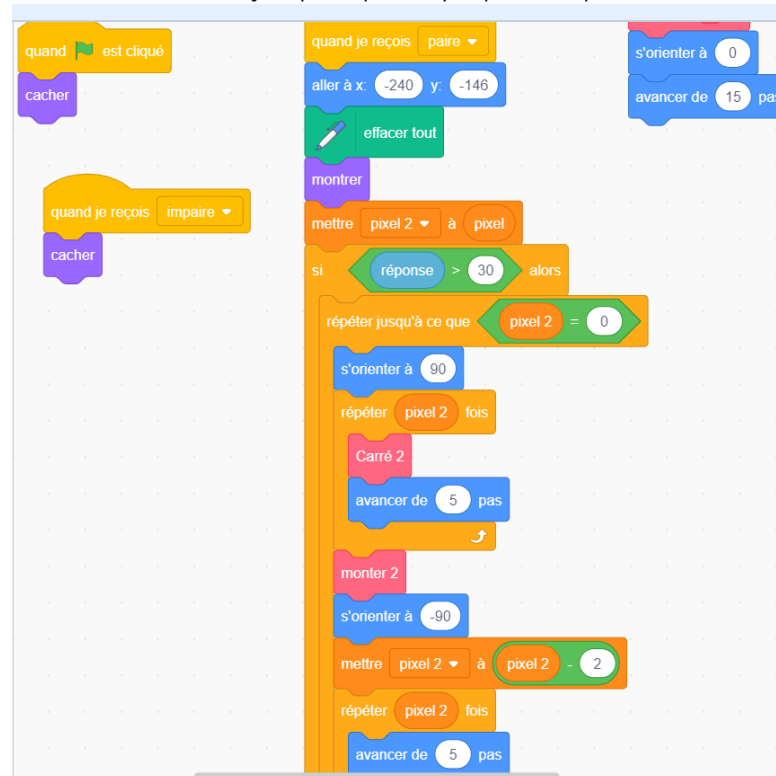




- ➔ Voici un extrait du programme final : Programme en cas de nombre pair  
Rappel de la forme de la pyramide pour 6 pixels

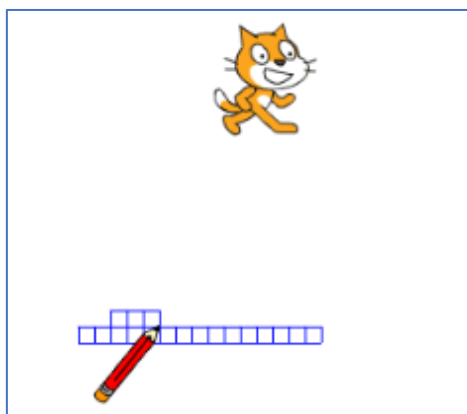


On crée une boucle qui va dessiner des carrés (représentant les pixels)  
La première ligne correspond au nombre de pixels donné puis la ligne suivante a deux pixels en moins et ainsi de suite jusqu'à qu'il n'y a plus de pixels à dessiner.

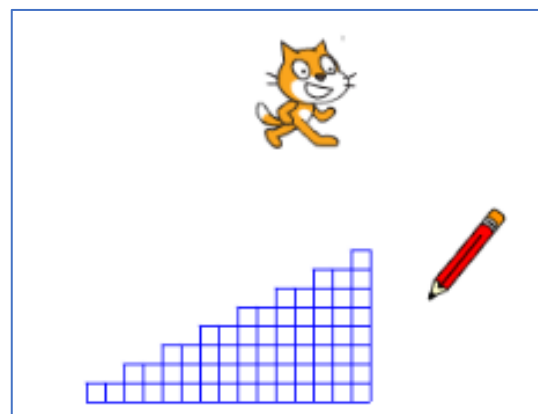


Pour un programme en cas de nombre impair, on s'arrête avec un pixel

- ➔ Finalement voici le programme permettant d'enclencher les deux autres programmes.



Le crayon trace les 15 pixels de la base,  
puis 13 pixels...



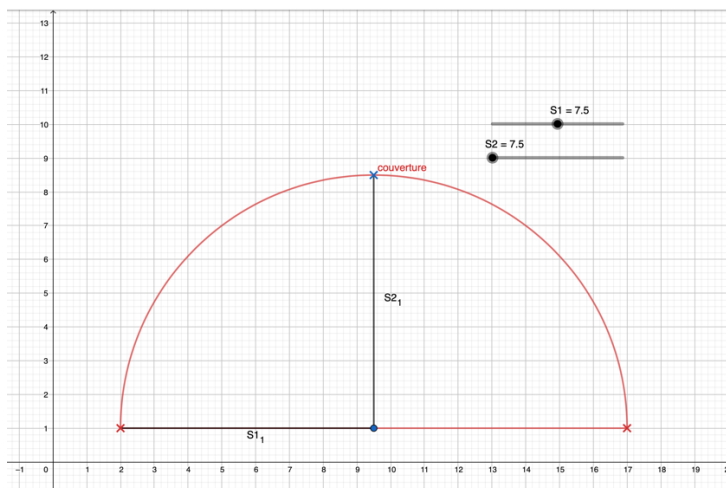
A la fin, le crayon a tracé la pyramide de  
base 15 ( $2 \times 7 + 1$ ) et de hauteur 8 ( $7 + 1$ )

## V. Quelques pistes non concluantes

### A) Recherche avec GeoGebra

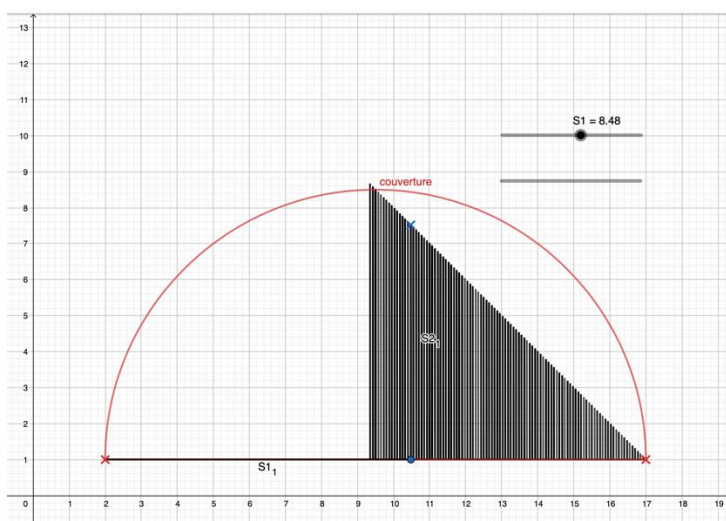


Après avoir suivie la première démarche et avoir eu un aspect approximatif de la forme du serpent nous voulions avoir une vision évolutive du mouvement du serpent dans la couverture étant un demi-disque. En utilisant l'application « GeoGebra » on trace dans un premier temps la couverture de diamètre  $d = 15\text{cm}$ .

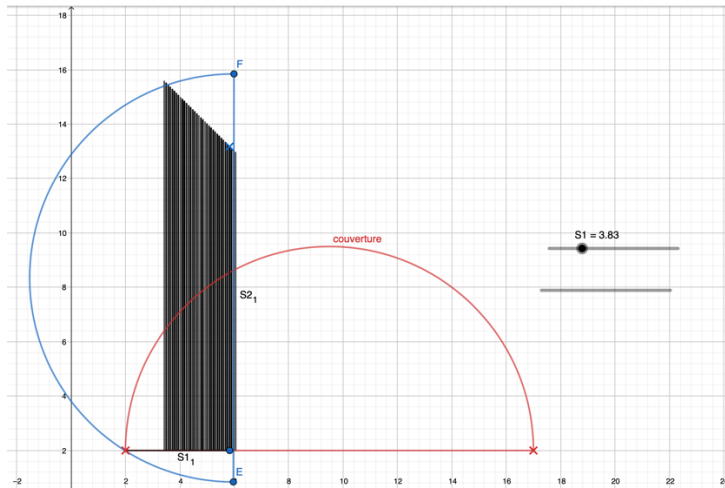


On a ensuite tracé le serpent en deux segments  $S1_1$  et  $S2_2$ . Ces deux segments sont variables grâce à des curseurs  $S1$  et  $S2$ .

Pour commencer on prend un exemple simple, le serpent se plie en deux parties avec un angle de  $\alpha = 90^\circ$ .



On observe que lorsque les deux segments varient le serpent reste couvert par la couverture. Cependant on peut noter qu'il existe certaines parties de la couverture où le serpent ne passe pas (cas où il se plie avec un angle droit en deux parties).



Enfin on observe que les traces du serpent qui dépassent de la position de la première couverture (demi-disque rouge) peuvent être recouvertes lorsque l'on modifie la position de la couverture (demi-disque bleu).

Nous avons fait cette simulation avec plusieurs modélisations du serpent (lorsqu'il se plie en trois parties avec des angles et des longueurs variables, etc.). Cependant nous nous sommes rendu compte rapidement que les traces du serpent étaient incontrôlables et que nous n'arrivions pas à travailler avec cette méthode.

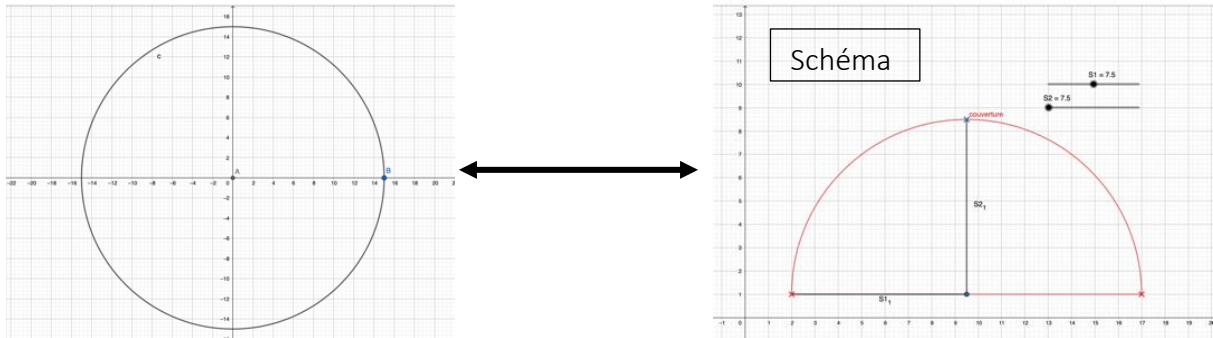
### B) Le mouvement du serpent : une fonction ?

Nous avons ensuite eue l'idée de modéliser le mouvement aléatoire du serpent par une fonction. Nous aurions ensuite utilisé nos connaissances sur le chapitre des « Intégrales » afin de trouver l'aire sous la courbe représentative de la fonction. Cependant cette idée a pris fin assez rapidement car nous n'avons pas eu d'idées sur l'utilisation de cette donnée.

## VI. Vers le concept de la demi-ellipse

Nous allons enfin vous présenter la réflexion du groupe des lycéens.

### A) Introduction



Lors de nos recherches on a pu passer d'une couverture circulaire de diamètre  $d = 15 \text{ cm}$  à un demi-disque toujours du même diamètre.

Nous nous sommes focalisés sur l'idée que le serpent devait se trouver comme ci-dessous (schéma 1) lorsqu'il est plié avec un angle droit en deux parties de même longueur.

Cependant en faisant faire une rotation de la couverture sur le serpent comme ci-dessous (schéma 2) on peut voir que l'on peut rogner des parties du demi-disque représentant la couverture obtenue lors de la deuxième étape. En effet il suffit que le serpent rentre sous la couette non pas en « L » mais en « V ». Par symétrie il suffit que les deux segments équidistants du serpent soient à  $45^\circ$  on peut donc éliminer certaines parties de la hauteur du demi-disque. Les deux extrémités du serpent sont séparées au maximum de 15 centimètres et au minimum ils se touchent.

On peut donc se rattacher à une propriété des ellipses qui indique que la somme des distances de n'importe quel point de l'ellipse aux deux foyers vaut une constante.

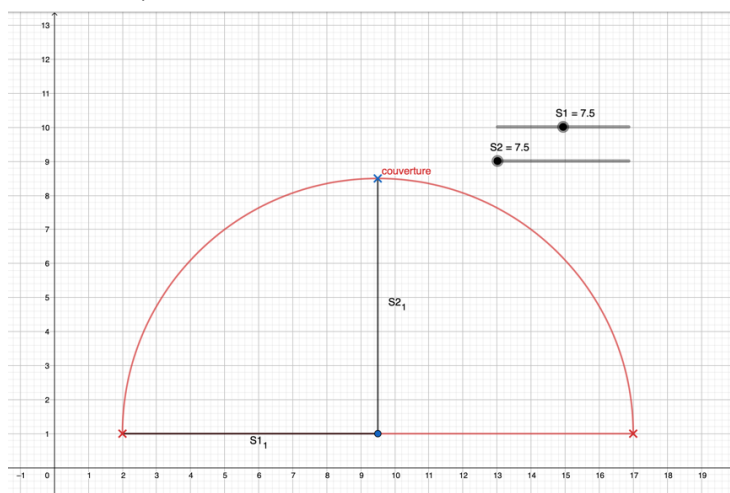
/!\ Problème : Les deux foyers qui représentent les deux extrémités du serpent sont mobiles, en effet les deux foyers peuvent se situer n'importe où à une distance de 15 à 0 centimètre.

Pour trouver la plus petite surface et donc la plus petite aire qui fonctionne pour la couverture il faut si possible trouver une « union » de toutes les ellipses qui ont des foyers distants entre 0 et 15 cm et une somme des distances aux foyers de 15 centimètres.

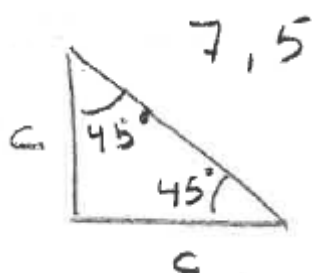


## B) Première idée

Nous avons décidé de vérifier si dans plusieurs cas le serpent pouvait rentrer dans la couverture ayant une forme de demi-ellipse.

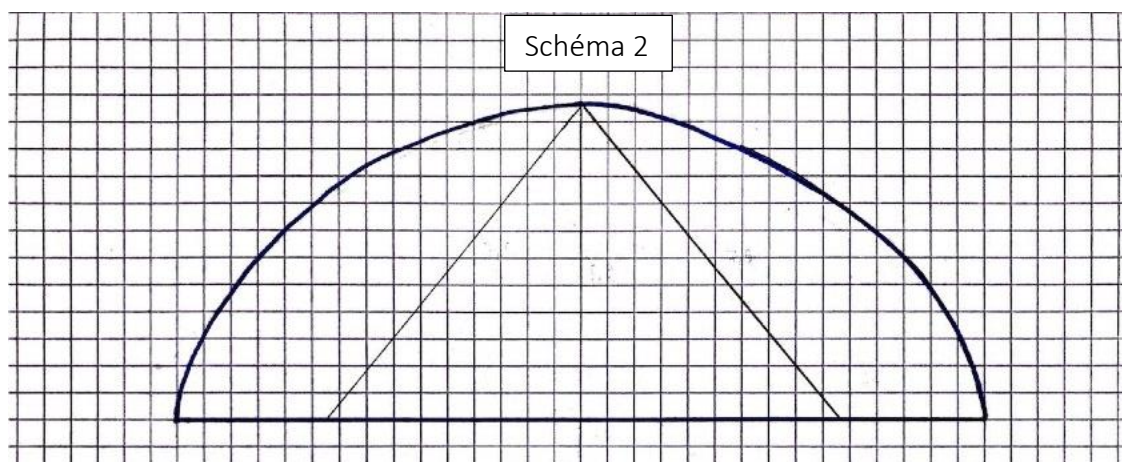
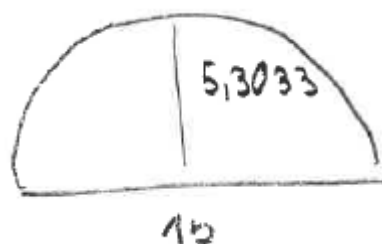


Cependant en faisant faire une rotation de la couverture sur le serpent comme ci-dessous (schéma 2) on peut voir que l'on peut rogner des parties du demi-disque représentant la couverture obtenue lors de la deuxième étape.



$$7,5 = \sqrt{2} c$$

$$c = \frac{7,5}{\sqrt{2}} \approx 5,3033$$





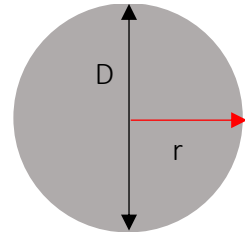
### C) Deuxième idée : le serpent « en cercle »

Lors de notre raisonnement nous avons ensuite voulu vérifier si dans le cas où le serpent se mettait sous la forme d'un cercle « parfait » il passait encore sous la couette vue dans « première idée ». On sait que le serpent fait 15 centimètres de long donc le périmètre du cercle sera de  $p = 15 \text{ cm}$ .

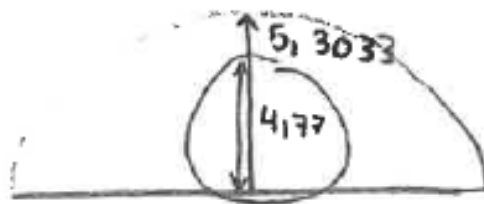
De plus on sait que pour un cercle  $p = 2\pi r$  ce qui équivaut à  $p = \pi D$

On résout donc l'équation  $15 = \pi D \Leftrightarrow \frac{15}{\pi} = D \Leftrightarrow D \approx 4,77$

On sait donc que lorsque le serpent se met en cercle le diamètre du cercle est d'environ  $D \approx 4,77 \text{ cm}$ .



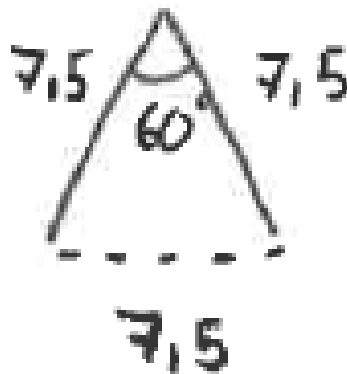
Or la hauteur de la couverture est de  $h \approx 5,3033$



On peut donc en conclure que lorsque le serpent se met en cercle il peut être couvert par la couverture on ne doit donc pas modifier pour le moment la forme de la couverture trouvée lors de la première idée.

### D) Troisième idée : Le serpent se plie avec un angle de $60^\circ$

Dans une continuité du raisonnement, on prend le cas où le serpent est plié en deux parties de même longueur avec un angle de  $60^\circ$ .



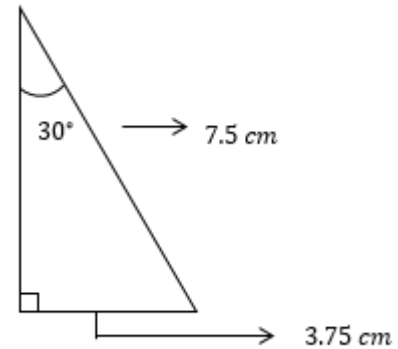
D'après le schéma ci-dessous (schéma 3) on peut voir que l'on va trouver la hauteur du triangle formé par les deux côtés du serpent et le bas de la couverture en utilisant le théorème de Pythagore.



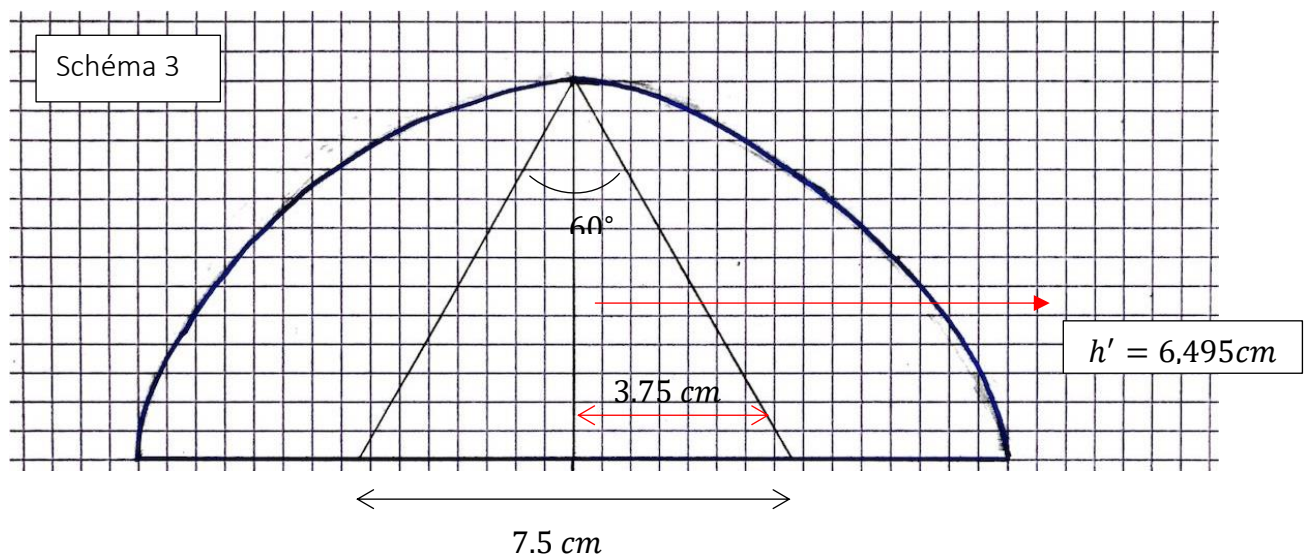
On cherche « c » la hauteur du triangle. On va donc résoudre :

$$\begin{aligned} 3,75^2 + c^2 &= 7,5^2 &\Leftrightarrow c^2 &= 7,5^2 - 3,75^2 \\ &&\Leftrightarrow c &= \sqrt{7,5^2 - 3,75^2} \\ &&\Leftrightarrow c &\approx 6,495 \end{aligned}$$

Or la hauteur de la couverture pour le moment est de  $h \approx 5,3033 < c \approx 6,495$ .

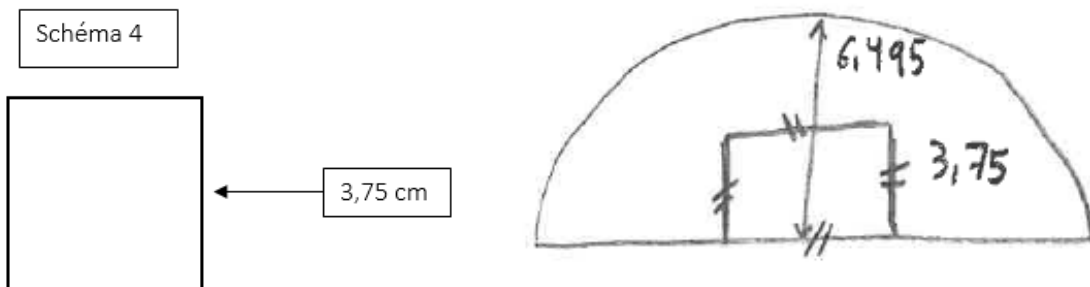


On doit donc modifier la hauteur de la couverture, et on obtient une demi-ellipse avec un base de longueur  $l = 15 \text{ cm}$  et de hauteur  $h' = 6,495 \text{ cm}$ .



#### E) Quatrième idée

Dans cette partie on va vérifier si lorsque le serpent se met en forme de carré comme sur le schéma ci-dessous (schéma 4) il peut rentrer sous la forme de la couette obtenue lors de la troisième idée.



Le serpent rentre donc bien dans la couverture étant une demi-ellipse de base  $l = 15 \text{ cm}$  et de hauteur  $h' = 6,495 \text{ cm}$  car  $h' = 6,495 > 3,75$ .

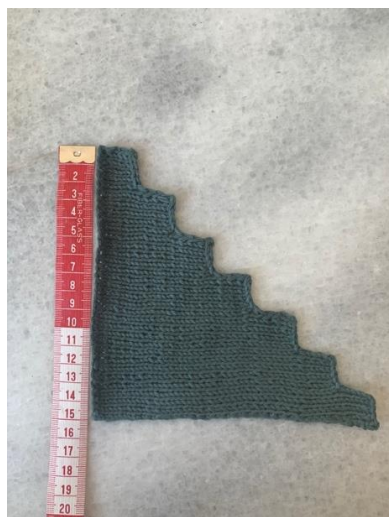
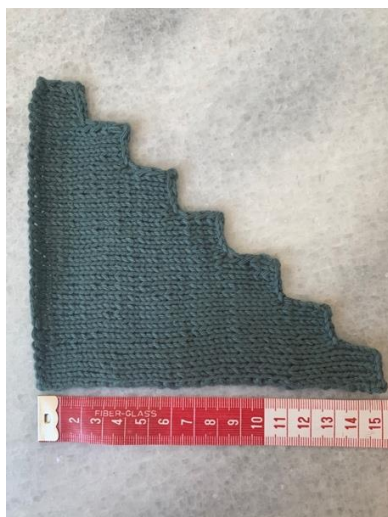
## VII. Conclusion

En conclusion on obtient deux couvertures différentes pour le serpent qui résulte de nos recherches respectives du groupe des collégiens et du groupe de lycéens.

Le groupe des collégiens a obtenue à l'issue des recherches la couverture suivante pour le serpent :

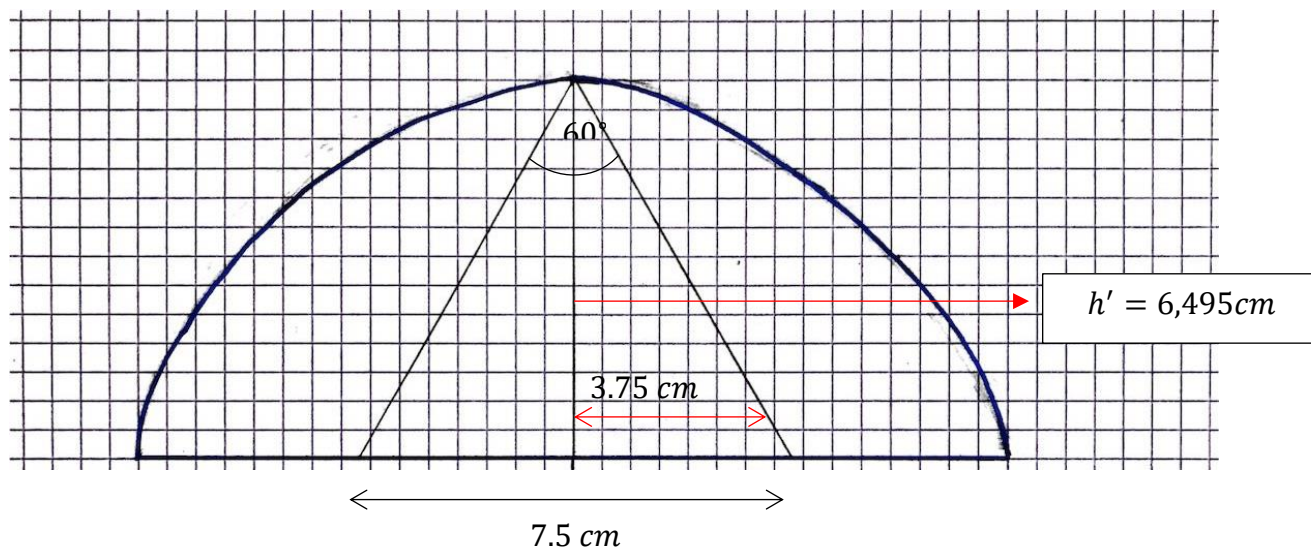


Cette couverture a une base de 15 centimètres comme on peut le voir sur les photos ci-dessous :



Le groupe des lycéens a, quant à lui, obtenu à la suite de ses recherches de sa « théorie de la demi-ellipse » la couverture ayant une aire minimale pour le serpent étant la suivante :

La demi-ellipse à une hauteur  $h' = 6,495\text{cm}$  et une base de longueur  $l = 15\text{ cm}$ .





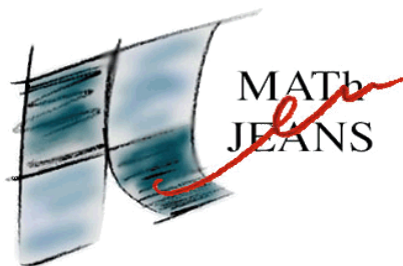
Merci à l'atelier



**Math-en-Jeans**

de nous avoir permis de faire

des maths



autrement !