La course aux décimales

Année 2017– 2018

DI ZAZZO Anouk, MAURET Lucie et SENE-ROUX Djilane, élèves en classe de 4°
TALAVERA Lola et HUART Julie, élèves en classe de 3°

Encadrées par PIGNON Christophe, OLYMPE Edelyne et BROUZES Sandrine

Établissement : Collège de Marciac

Chercheuse : Agnès LAGNOUX, université Paul Sabatier, Toulouse

1. Présentation du sujet

La chercheuse Agnès Lagnoux nous a proposé le sujet suivant :
« la course aux décimales » où l'on nous proposait de trouver une approximation la plus précise possible de π.

2. Résultats obtenus

Nous avons trouvé 5 méthodes : 3 méthodes qui se servent de la formule du périmètre du cercle (2 sur Géogebra et une sur Scratch) , une méthode qui se sert de la formule de l'aire du cercle et enfin une méthode qui se sert d'une série de fractions.

Nous avons comparé les résultats pour trouver la méthode la plus précise.

Avec le périmètre sur Géogébra à partir de l'angle :
Jusqu'à 10 décimales : 3,1415926535

Avec le périmètre sur Scratch à partir de l'angle :
Jusqu'à 7 décimales : 3,1415926

Avec le périmètre sur Géogébra à partir de la médiatrice :
Jusqu'à 11 décimales : 3,14159265358

Avec les suites de nombres :
Jusqu'à 4 décimales : 3,1415

Avec l'aire sur Géogébra à partir de l'angle :
Jusqu'à 9 décimales : 3,141592653

3. Nos méthodes

1. Formules et premiers essais

Pour débuter nos recherches, nous avons essayé de trouver dans nos connaissances des formules contenant π afin de le déduire de celles-ci.

Soient d, le diamètre du cercle et r, le rayon.

- Le périmètre du cercle = $2 \times \pi \times r = \pi \times d$

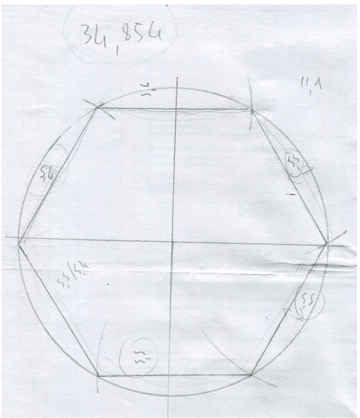
Donc π = $\frac{périmètre}{d}$

- L'aire du cercle = $\pi \times (r^2)$

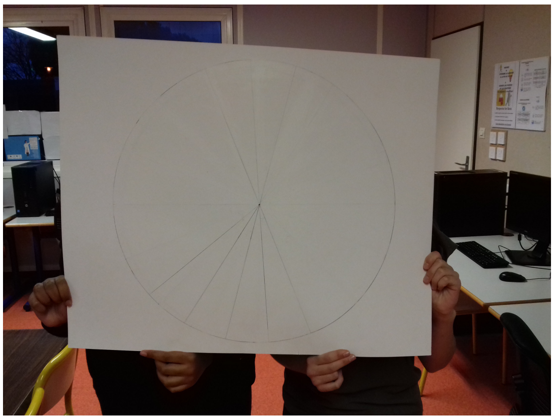
Donc π = $\frac{aire}{r^2}$

- Une série de fractions avec les nombres impairs ($\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}$ ...)

A partir de cela, nous avons commencé par les utiliser sur papier pour tester la méthode.



Nous avons décidé de transformer le cercle en polygone régulier parce que nous ne pouvions pas calculer le périmètre ni l'aire du cercle sans π et nous ne pouvions pas mesurer avec précision le périmètre de celui-ci.



Nos premiers essais étaient sur cahier mais n'étaient pas assez précis. Nous avons donc décidé de passer sur une plus grande feuille. Ce dessin ne nous permettait pas non plus de trouver une approximation très précise.

Nous avons donc décidé de passer à l'ordinateur.

2. Méthode sur GéoGebra avec le périmètre et la médiatrice

A partir de la formule du périmètre du cercle (soit 2 * π * r) nous avons déduit la formule suivante :

$$\pi \approx \frac{longueur\ du\ côté \times nb\ de\ côtés}{diamètre}$$.

Par la suite nous avons établi un algorithme afin de pouvoir appliquer cette formule à l'infini et de la prouver :

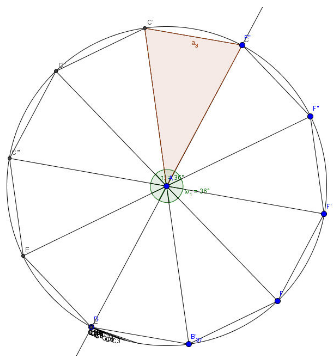
1) On trace un polygone régulier dans un cercle.
2) On mesure son côté.
3) On multiplie le résultat obtenu par le nombre de côtés.
4) On divise ce nombre par le diamètre.
5) On obtient une approximation de π.
6) On trace la médiatrice d'un côté et on obtient un nouveau point sur le cercle, qui correspond au 1er sommet d'un polygone avec 2 fois plus de côtés.
7) On recommence ces calculs, on continue et cela multiplie les côtés par deux à chaque fois.

Afin de matérialiser nos recherches, nous les avons représentées sous forme d'un tableau.

	A	B	C	D			G
1	nb de côtés	longueur du côté	périmètre	approximation de pi	...	...	Nom du ...
2	6	2.654403953170571	15.926423719023427	3.000000000000004			a.
3	12	1.374020592951926	16.488247115423114	3.105828541230252			b.
4	24	0.692938481242412	16.630523549817898	3.132628613281238			c.
5	48	0.347212649556437	16.66620717870898	3.139350203046891			d.
6	96	0.173699325572477	16.6751352549578	3.141031950890537			e.
7	192	0.086861290220126	16.677367722264123	3.141452472285492			f.
8	384	0.043432098612262	16.677925867108744	3.141557607911883			g.
9	768	0.021716230996186	16.67806540507061	3.141583892148255			h.
10	1536	0.010858138209421	16.678100289670663	3.14159046322799			i.
11	3072	0.005429071943629	16.678109010828308	3.141592105999362			j.
12	6144	0.002714536326679	16.678111191117146	3.141592516692097			k.
13	12288	0.001357268207698	16.678111736195454	3.141592619366429			l.
14	24576	0.000678634109395	16.678111872488742	3.141592645039479			m.
15	49152	0.000339317055391	16.678111906588796	3.141592651462777			n.
16	98304	0.000169658527782	16.678111915067774	3.141592653059929			o.
17	196608	0.000084829263902	16.678111917176413	3.141592653457126			p.
18	393216	0.000042414631953	16.678111918099827	3.141592653631066			q.
19	786432	0.000021207315977	16.678111918068712	3.141592653625205			r.
20	1572864	0.000010603657988	16.678111917859976	3.141592653585886			s.
21	3145728	0.000005301828994	16.67811191877071	3.141592653757438			t.
22	6291456	0.000002650914498	16.678111922656125	3.141592654489318			u.
23	12582912	0.000001325457249	16.678111921961474	3.141592654358469			v.
24	25165824	0.000000662728623	16.678111892076885	3.141592648729223			w.
25	50331648	0.000000331364312	16.67811189692879	3.141592649643158			aa.
26	100663296	0.000000165682156	16.678111943323728	3.141592658382396			bb.
27	201326592	0.000000082841077	16.678111764849113	3.14159262476381			cc.
28	402653184	0.00000004142054	16.67811239005858	3.141592742532145			dd.
29	805306368	0.000000020710269	16.678111617034116	3.14159259692046			ee.
30	1610612736	0.000000010355135	16.678111735286116	3.141592619195141			ff.
31	3221225472	0	0	0			gg.

La 20ème fois où nous avons appliqué la formule nous avons trouvé notre meilleure approximation (11 décimales). Après cela, nous nous sommes éloignées car le logiciel ne pouvait plus mesurer avec assez de précision des segments trop petits.
A la 31ème fois, Géogébra affichait des 0 dans chaque colonne car il n'était plus assez précis, nous avons dû nous arrêter.

3. <u>Méthode sur GéoGebra avec le périmètre à partir de l'angle</u>



Pour trouver π, nous avons aussi utilisé la formule pour calculer le périmètre d'un cercle à partir de l'angle :
2 * π * rayon ou π * diamètre.

Nous avons d'abord commencé par tracer un cercle sur Géogébra puis nous avons choisi le nombre de côtés de notre polygone régulier. Nous avons calculé l'angle en faisant 360 divisé par le nombre de côtés puis nous avons tracé l'angle et le côté obtenu pour former un triangle.

Ensuite, nous avons multiplié la longueur de ce côté par le nombre des côtés du polygone pour obtenir le périmètre de celui-ci.
Enfin, nous avons divisé le périmètre du polygone par le diamètre du cercle pour obtenir une approximation de π.

Nb côtés	Angle	Longueur côté	Périmètre	Résultats
17	21.176470588235293	1.820482061543388	30.948195046237593	3.123741802881695
150	2.4	0.207485168810183	31.122775321527484	3.14136298250354
800	0.45	0.038906213462024	31.124970769619143	3.141584579044783
1000	0.36	0.031124999568827	31.1249995688274	3.141587485879595
1900	0.189473684210526	0.016381598202635	31.125036585007113	3.141591222090634
15000	0.024	0.016381598202636	245.72397303953264	24.802035963873703
12000	0.03	0.002593754200992	31.12505041190714	3.141592617702415
23000	0.015652173913043	0.001353263072638	31.125050670675215	3.141592643821051
25000	0.0144	0.001245002027421	31.125050685520506	3.141592645319454
100663296	0.000003576278687	0.000000309199599	31.125050771450788	3.141592653992787
100833500	0.000003570242033	0.000000308677679	31.1250507510723	3.141592651935894
100700300	0.000003574964523	0.000000309085978	31.125050723290087	3.141592649131709
100690000	0.000003575330221	0.000000309117596	31.125050757409504	3.141592652575536
200000000	0.0000018	0.000000155625254	31.125050707828645	

Plus nous avons augmenté le nombre de côtés du polygone, plus l'approximation de π était précise. Malheureusement, un nombre trop élevé de côtés ne pouvait plus être mesuré assez précisément par le logiciel, nous nous sommes donc arrêtées.

4. Méthode sur GéoGébra avec l'aire

Pour cette méthode, nous avions décidé de calculer l'aire d'un polygone à l'intérieur d'un cercle pour se rapprocher de l'aire du cercle le plus possible.
Pour cela, nous avons d'abord tracé un cercle et décidé le nombre de côtés qu'aurait le polygone régulier.

Nous avons fait calculer l'angle en divisant 360 par le nombre de côtés puis nous avons tracé le triangle à partir de cet angle. Nous avons mesuré l'aire de ce triangle avec Géogébra puis nous avons multiplié cette aire par le nombres de côtés du polygone pour calculer l'aire de ce dernier. Pour finir, nous avons divisé ce résultat par le rayon du cercle de départ au carré : $\frac{aire\,du\,triangle \times nombre\,de\,côtés}{rayon^2} \approx \pi$

Ce résultat nous donnait une approximation de π. En fonction de celle-ci, petit à petit nous changions le nombre de côtés pour nous rapprocher de plus en plus de π.

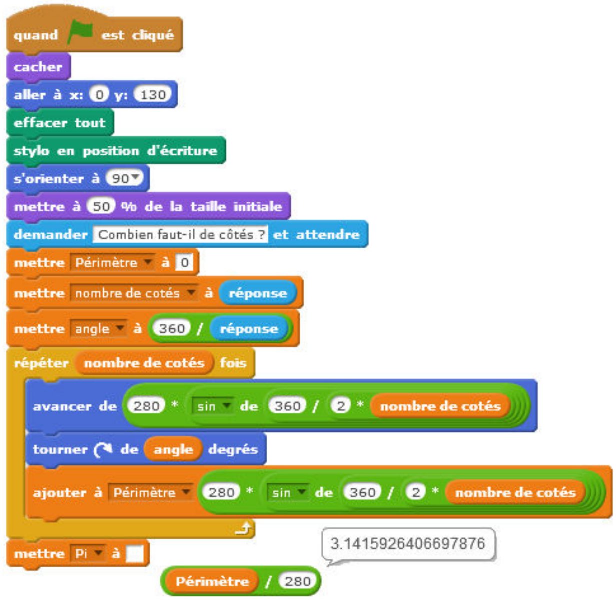
A	B	C	D	E	F
rayon*rayon	nb de côtés	angle	aire du triangle	aire du polygone	π
36	5	72	17.11902	85.5951	2.377641666666667
36	12000	0.03	0.539919003644921	6479.028043739051	179.97300121497375
36	5	72	17.1190172933128	85.595086466564	2.37764129073789
36	600	0.6	0.188492114092426	113.0952684554556	3.141535234873769
36	12000	0.03	0.009424777530128	113.09733036154067	3.141592510042798
36	300000	0.0012	0.000376991118405	113.0973355215837	3.141592653377327
36	600000	0.0006	0.000188495559212	113.097335527179	3.141592653532752
36	1200000	0.0003	0.000094247779605	113.09733552611353	3.141592653503155
36	4800000	0.000075	0.000023561944901	113.09733552451488	3.141592653458749
36	9600000	0.0000375	0.000011780972451	113.09733552877823	3.141592653577175
36	19000000	0.000018947368421	0.000005952491343	113.09733551589952	3.141592653219433
36	12000000	0.00003	0.000009424777961	113.097335528778	3.141592653577168
36	1500000	0.00024	0.000075398223686	113.097335528778	3.141592653577168
36	20000000	0.000018	0.000005654866776	113.09733552344899	3.14159265342914
36	30000000	0.000012	0.000003769911183	113.0973354968037	3.141592652688993
36	100000000	0.0000036	0.000001130973355	113.097335496804	3.141592652689002
36	200000000	0.0000018	0.000000565486678	113.0973356744392	3.141592657623313
36	1600000	0.000225	0.000070685834705	113.09733552806753	3.141592653557433
36	1900000	0.000189473684211	0.000059524913436	113.09733552855599	3.141592653571002

Plus nous avons augmenté le nombre de côtés du polygone, plus l'approximation de π était précise. Malheureusement, un nombre trop élevé de côtés ne pouvait plus être mesuré assez précisémentpar le logiciel, nous nous sommes donc arrêtées.

5. Méthode sur Scratch avec le périmètre à partir de l'angle

Grâce à Scratch, nous avons réalisé un polygone régulier pour déduire une approximation de π.

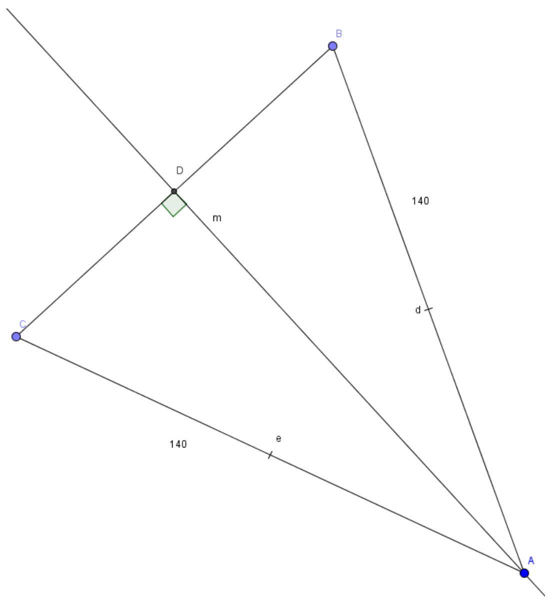
Le script est le suivant :



D'abord, on positionne le lutin de façon à pouvoir par la suite apercevoir en entier le polygone régulier créé.

On rentre ensuite le nombre de côtés du polygone régulier.

La formule $280\times\sin\left(\frac{360}{2\times nombre\ de\ côtés}\right)$ donne la longueur égale de chaque segment du polygone régulier.



En effet :
Soit la figure ci-contre qui représente un des triangles intérieurs du polygone régulier.

On sait que ABC est un triangle isocèle en A et que l'angle $\widehat{BAC} = \frac{360}{nombre\ de\ côtés}$.

Or, comme la droite (AD) est la médiatrice de issue du sommet principal de ABC, alors elle est aussi la bissectrice.

Donc $\widehat{DAC} = \frac{360}{2\times nombre\ de\ côtés}$.

On sait que DAC est un triangle rectangle en D et que $\widehat{DAC} = \frac{360}{2\times nombre\ de\ côtés}$.

Or par définition, sinus (Angle)= $\frac{opposé}{hypothénuse}$.

Donc sinus ($\frac{360}{2\times nombre\ de\ côtés}$)= $\frac{DC}{CA}=\frac{DC}{140}$.

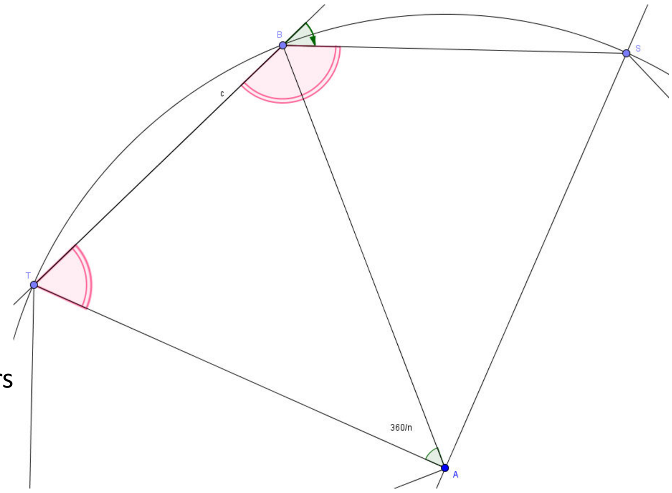
Donc CD = $140\times\sin\left(\frac{360}{2\times nombre\ de\ côtés}\right)$.

On sait que le côté du triangle est [BC] et que sa moitié CD = $140\times\sin\left(\frac{360}{2\times nombre\ de\ côtés}\right)$.

Or, comme (AD) est la médiatrice de ABC, elle coupe [BC] en deux segments égaux.

Donc CD = DB = $140 \times \sin\left(\frac{360}{2 \times nombre\ de\ côtés}\right)$ et CB = $280 \times \sin\left(\frac{360}{2 \times nombre\ de\ côtés}\right)$.

On calcule l'angle de rotation désigné par une flèche sur la figure ci-contre.



L'angle $\widehat{BAT} = \frac{360}{nombre\ de\ côtés}$.

On sait que BAT et BAS sont des triangles isocèles superposables.

Or, leurs angles à la base sont égaux et la somme de leurs angles est égale à 180°.

Donc $\widehat{ATB} = \widehat{TBA}$ et

$\widehat{TBS} = 2 \times \widehat{TBA} = 180 - \frac{360}{nombre\ de\ côtés}$.

On sait que $\widehat{B} = 180\,°$

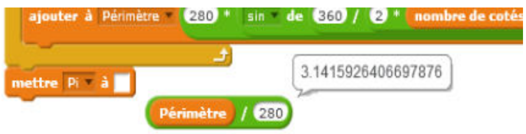
Or, l'angle vert duquel on veut tourner est égal à $180 - \widehat{TBS}$.

Donc l'angle vert = $180 - \left(180 - \frac{360}{nombre\ de\ côtés}\right) = \frac{360}{nombre\ de\ côtés}$.

On va donc effectuer une rotation égale à $\frac{360}{nombre\ de\ côtés}$.

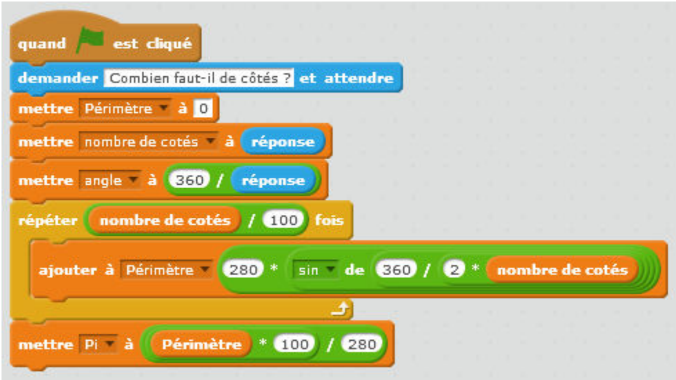
A chaque segment créé, le programme ajoute sa longueur au périmètre du polygone. On répète ces deux actions autant de fois qu'il y a de côtés choisis par l'utilisateur.
A la fin, Scratch divise le périmètre du polygone par le diamètre, initialement fixé à 280.
On obtient ainsi une approximation de π.

Petite nuance au niveau de l'affichage du résultat final : le résultat affiché sur la scène n'affiche que 6 décimales et ne peut pas être paramétré, tandis que dans le script, si on pointe celui-ci avec la souris, une fois sorti de l'instruction, on peut lire 16 chiffres derrière la virgule comme le montre la capture ci-contre :



Nous nous sommes arrêtées au bout d'un moment car, avec un nombre de côtés trop important, le programme prenait trop de temps à se réaliser. Lorsque nous avons fait nos recherches, nous n'avons pas pensé à réduire, par exemple, la longueur du polygone par 4 puis le multiplier le périmètre par 4 ensuite. Cette technique nous aurait permis d'aller beaucoup plus vite. Nous avons testé cette méthode assez rapidement.

Une autre idée nous a été proposée lors du Congrès, celle de ne pas dessiner mais juste de calculer le périmètre. Nous avons essayé en modifiant un peu le script. Nous avons suprimé les parties qui commandaient du dessin et avons essayé la méthode de la division puis de la multiplication pour aller plus rapidement. Nous avons choisi le nombre 100 car il était entier et donc simple à utiliser. Même si les calculs se faisaient plus vite, nous sommes arrivées aux mêmes limitations que précédemment.



6. Suite de nombres

Dans un livre, nous avons découvert que si nous faisions la somme 4/1 – 4/3 + 4/5 – 4/7 + 4/9 – 4/11 + 4/13 … à l'infini, nous trouvions π.

Nous avons créé un tableur pour calculer facilement cette formule.

	A	B	C	D	E
1	Nombre impair	Nombre 4	Quotient B/A	Addition, soustraction	Somme et approximation de Pi
2	1	4	4,00000000000000000000		4,00000000000000000000
3	3	4	1,33333333333333000000	-1	2,66666666666667000000
4	5	4	0,80000000000000000000	1	3,46666666666667000000
5	7	4	0,57142857142857100000	-1	2,89523809523810000000
6	9	4	0,44444444444444400000	1	3,33968253968254000000
7	11	4	0,36363636363636400000	-1	2,97604617604618000000
8	13	4	0,30769230769230800000	1	3,28373848373848000000

Pour la ligne 3 :

La colonne A part de 1 et descend en ajoutant 2 à chaque fois.	'=A2 + 2'
La colonne B ne change pas, elle reste à 4.	'=4'
La case C est le résultat de la case B / case A.	'=B3/A3'
Pour alterner 1 et -1 dans la colonne D (le + et le -), on fait le résultat de la case D d'au-dessus * (-1). Si le résultat précédent est 1, 1*(-1) = -1. Si le résultat précédent est -1, -1*(-1) = 1.	'=D2 * (-1)
Pour trouver le résultat dans la colonne E qui est l'approximation de π, on fait le résultat final de la case E précédente + la case D * la case C.	'=E2 + D3 * C3'

Nous nous sommes arrêtées au bout d'un moment car cette méthode prenait beaucoup de temps et ne nous permettait pas d'obtenir un grand nombre de décimales de π (seulement 4 : 1,4,1,5).

4. Conclusion

1. Comparaison des résultats

Nous avons comparé le nombre d'essais réussis et ratés afin de trouver la méthode la plus rapide et la méthode la plus fiable.

Avec la méthode du périmètre sur GéoGébra à partir de l'angle, nous avons effectué 60 essais dont 21 qui n'ont pas fonctionné pour cause d'imprécisions ou de nombre trop élevé.

Avec la méthode du périmètre sur Scratch à partir de l'angle, nous avons effectué uniquement 10 essais car le traçage du polygone régulier était de plus en plus long à cause du nombre de côtés en constante augmentation. Avec la seconde méthode nous avons effectué 14 essais.

Avec la méthode du périmètre sur GéoGébra à partir de la médiatrice, nous avons effectué 32 essais.

Avec la méthode du l'aire sur GéoGébra à partir de l'angle, nous avons effectué 35 essais dont 9 qui n'ont pas fonctionné pour cause d'imprécisions ou de nombre trop élevé.

Avec la méthode des suites de nombres, nous avons effectué 259785 essais car il était très simple d'étirer la formule dans le tableur.

2. Conclusion définitive

Après avoir réalisé notre travail, nous avons élu les méthodes les plus rapides, les plus fiables, les plus pratiques et les plus précises :

D'après nous, la méthode la plus fiable est celle avec le plus d'essais mais le moins d'erreurs.
Donc, la méthode la plus fiable est la méthode du périmètre avec la médiatrice sur Géogébra.

D'après nous, la méthode la plus rapide est celle avec le moins d'essais.
La méthode la plus rapide est la méthode du périmètre à partir de l'angle sur Scratch.

D'après nous, la méthode la plus précise est celle avec laquelle nous avons atteint le plus grand nombre de décimales de π.
Donc la méthode la plus précise est la méthode du périmètre à partir de la médiatrice sur Géogébra.

D'après nous, la méthode la plus pratique est celle avec laquelle nous avons eu le moins de manipulations à faire.
Donc la méthode la plus pratique est la méthode des suites de nombres.