Les boîtes de gâteaux

Année 2017 – 2018

Samuel Favard, Louis Martin, Clément Poggi, Joan Prat, élèves de classe de 2nd.

Encadrés par Jildaz Cousin

Établissements : Lycée Edouard Branly de Châtellerault

Chercheur : Nicolas James, laboratoire de mathématiques de l'université de Poitiers

1. Présentation du sujet

Dans du cadre de Math En Jeans, nous avons travaillé sur l'optimisation du rangement de gâteaux dans une boîte, c'est à dire trouver la boîte la plus petite possible qui peut stocker un maximum de gâteaux circulaires, rangés à plat. L'objectif était de trouver la meilleur forme de boîte et la meilleure façon de ranger les gâteaux à l'intérieur.
Nous avons tout d'abord choisi la dimension des gâteaux : des cercles de 5 cm de diamètre(1).
Pour comparer les boîtes et les rangements, nous avons utilisé le taux de remplissage :

$t=\frac{A_G}{A_B}$ où A_G est l'aire totale des gâteaux et A_B l'aire de la boîte.

Ce taux sera exprimé en pourcentage (%). Plus le taux de remplissage est grand, plus la boîte est remplie.

Clément a travaillé sur la boîte carrée, Louis sur la boîte en forme de losange, Samuel sur la boîte triangulaire et pour finir Joan sur la boîte circulaire.

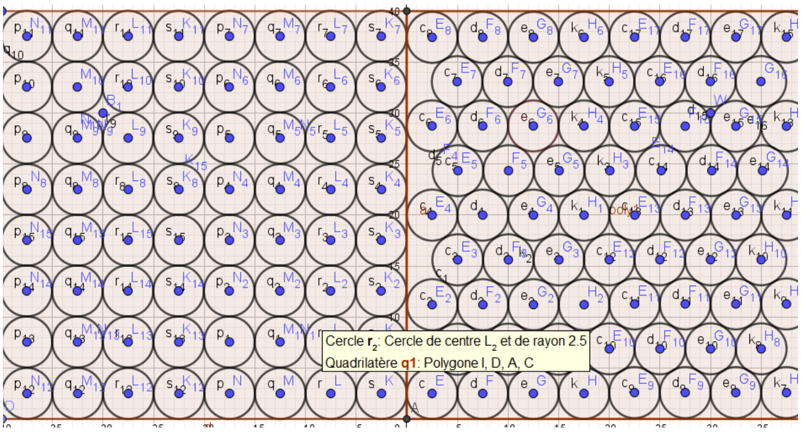
2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

La boîte et le rangement pour obtenir le meilleur taux de remplissage dépendent du nombre de gâteaux à ranger.

3. Texte de l'article

1 Boîte carrée

Nous avons d'abord choisi une forme de boite à gâteaux courante qui est le carré. Nous avons définis deux dispositions de gâteaux : la formation en grille et la formation en quinconce. L'objectif était de déterminer quelle disposition était la plus performante dans la boîte carrée.
A l'aide du logiciel Geogebra, nous avons étudié le taux de remplissage en fonction de la longueur du côté de la boîte.
Nous avons commencé par construire une boîte carrée à dimension variable, puis nous avons placé des gâteaux circulaires en formation grille jusqu'à obtenir un carré de 40 cm de côté.
Nous avons fait de même pour la formation en quinconce.



Boîte carrée, rangement en grille ou en quinconce

A l'aide d'un tableur, nous avons relevé le nombre de gâteaux dans chaque figure en fonction des dimensions de la boîte.

Coté du carré		**Nombre de gâteaux (config 1)**	**Nombre de gâteaux (config 2)**
borne inf	borne sup	grille	quinconce
5	9,4	1	1
9,4	10	1	2
10	12,5	4	3
12,5	14	4	4
14	15	4	6
15	18	9	8
17,5	18	9	9
18	20	9	12
20	22,5	16	14
22,5	25	16	20
25	27	25	23
27	27,5	25	28
27,5	30	25	30
30	31,5	36	33
31,5	32,5	36	39
32,5	35	36	42
35	35,5	49	46
35,5	37,5	49	52
37,5	40	49	56
40		64	68

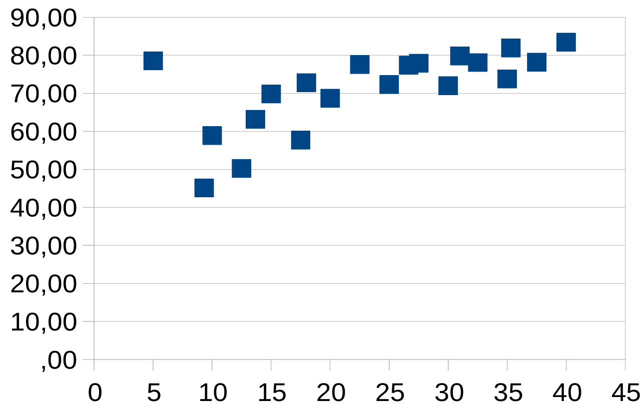
Nombre de gâteaux en fonction du côté du carré : en jaune lorsque le rangement en grille est meilleur, en violet lorsque le rangement en quinconce est meilleur.

Nous avons calculé les taux de remplissage et comparé les deux dispositions. Ainsi nous avons remarqué que la formation en quinconce semble devenir plus intéressante au fur et à mesure que la boite grandit, avec un taux de remplissage qui dépasse 83 %.

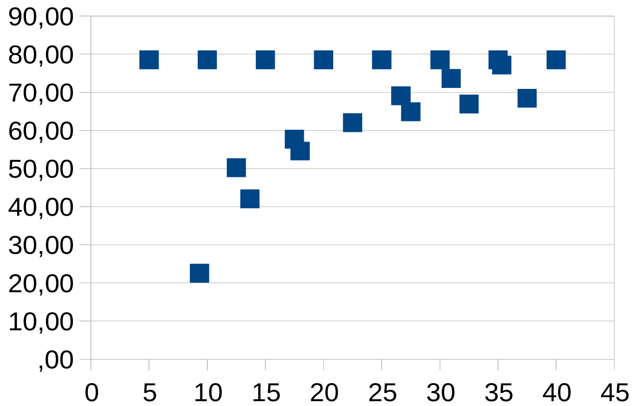
Coté du carré		**aire occupé par les gâteaux**		**taux de remplissage**	
borne inf	borne sup		cm²		
5	9,4	19,63	19,63	78,54	78,54
9,4	10	19,63	39,27	22,22	44,44
10	12,5	78,54	58,90	78,54	58,90
12,5	14	78,54	78,54	50,27	50,27
14	15	78,54	117,81	40,07	60,11
15	18	176,71	157,08	78,54	69,81
17,5	18	176,71	176,71	57,70	57,70
18	20	176,71	235,62	54,54	72,72
20	22,5	314,16	274,89	78,54	68,72
22,5	25	314,16	392,70	62,06	77,57
25	27	490,87	451,60	78,54	72,26
27	27,5	490,87	549,78	67,34	75,42
27,5	30	490,87	589,05	64,91	77,89
30	31,5	706,86	647,95	78,54	71,99
31,5	32,5	706,86	765,76	71,24	77,17
32,5	35	706,86	824,67	66,92	78,08
35	35,5	962,11	903,21	78,54	73,73
35,5	37,5	962,11	1 021,02	76,34	81,02
37,5	40	962,11	1 099,56	68,42	78,19
40		1 256,64	1 335,18	78,54	83,45

Taux de remplissage en fonction du côté du carré.

Pour faciliter la comparaison , nous avons fait des graphiques avec les résultats trouvés.



Taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux, rangement en quinconce.



Taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux, rangement en grille.

Sur le tableur, nous avons cherché des formules pour généraliser ces conjectures.

Cas du rangement en grille :
Soit c le côté du carré.

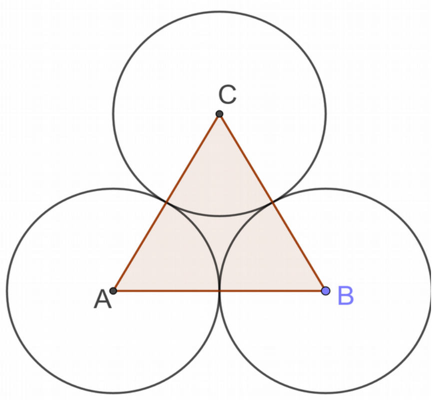
Nombre de lignes : $Ent\left(\frac{c}{5}\right)$ où Ent est la fonction partie entière (Par exemple $Ent(3{,}7)=3$)

Nombre de colonnes : $Ent\left(\frac{c}{5}\right)$

Nombre de gâteaux : $Ent\left(\frac{c}{5}\right)^2$

Taux de remplissage : $\frac{25\pi}{c^2}Ent\left(\frac{c}{5}\right)^2$

Cas du rangement en quinconce :
Soit c le côté du carré.
Soit l le nombre de lignes.
Sur le schéma ci-contre, les centres A , B et C des trois gâteaux forment un triangle équilatéral de base(2) $AB=5$ et de hauteur $5\frac{\sqrt{3}}{2}$



angement en quinconce.

Sur la première ligne de gâteaux

l est le plus grand entier tel que $\frac{5\sqrt{3}}{2}(l-1)+5\leq c$ (3)

Donc $l=Ent\left(\frac{(c-5)\times 2}{5\sqrt{3}}+1\right)$ (4)

Nombre de gâteaux sur la ligne 1 : $Ent\left(\frac{c}{5}\right)$

Nombre de gâteaux sur la ligne 2 : $Ent\left(\frac{c-2{,}5}{5}\right)$ (5) car 2,5 cm sont perdus de chaque côté de la 2ème ligne.

- Si l est pair :
  Nombre de lignes de rang pair : $\frac{l}{2}$
  Nombre de gâteaux : $\frac{l}{2}\times Ent\left(\frac{c}{5}\right)+\frac{l}{2}\times Ent\left(\frac{c-2{,}5}{5}\right)$ (6)

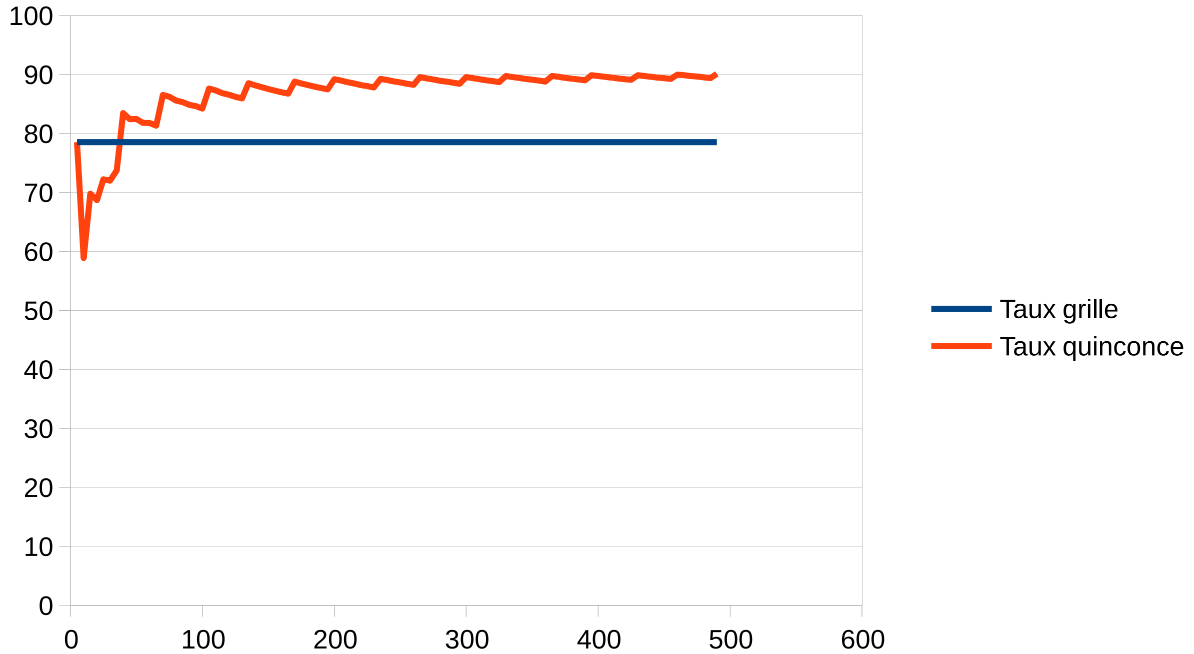
- Si l impair :
  Nombre de lignes de rang pair : $Ent\left(\frac{l}{2}\right)+1$
  Nombre de lignes de rang impair : $Ent\left(\frac{l}{2}\right)$
  Nombre de gâteaux : $\left(Ent\left(\frac{l}{2}\right)+1\right)Ent\left(\frac{c}{5}\right)+Ent\left(\frac{l}{2}\right)\times Ent\left(\frac{c-2{,}5}{5}\right)$ (7)

On obtient le tableau suivant :

BOITE			GRILLE					QUINCONCE				
Étape	Dimension		Nb colonnes	Nb lignes	Nb gâteaux	Taux grille		nb colonnes	nb lignes	Pair ou impair	N gâteaux	Taux quinco
1	5		1	1	1	78,5398163		1	1	1	1	78,5398163
2	10		2	2	4	78,5398163		2	2	0	3	58,9048623
3	15		3	3	9	78,5398163		3	3	1	8	69,8131701
4	20		4	4	16	78,5398163		4	4	0	14	68,7223393
5	25		5	5	25	78,5398163		5	5	1	23	72,2566310
6	30		6	6	36	78,5398163		6	6	0	33	71,9948316
7	35		7	7	49	78,5398163		7	7	1	46	73,7312562
8	40		8	8	64	78,5398163		8	9	1	68	83,4485549
9	45		9	9	81	78,5398163		9	10	0	85	82,4183258
10	50		10	10	100	78,5398163		10	11	1	105	82,4668072
11	55		11	11	121	78,5398163		11	12	0	126	81,7852633
12	60		12	12	144	78,5398163		12	13	1	150	81,8123087
13	65		13	13	169	78,5398163		13	14	0	175	81,3282122
14	70		14	14	196	78,5398163		14	16	0	216	86,5540833
15	75		15	15	225	78,5398163		15	17	1	247	86,2192650
16	80		16	16	256	78,5398163		16	18	0	279	85,5961280
17	85		17	17	289	78,5398163		17	19	1	314	85,3339181
18	90		18	18	324	78,5398163		18	20	0	350	84,8423942
19	95		19	19	361	78,5398163		19	21	1	389	84,6315472
20	100		20	20	400	78,5398163		20	22	0	429	84,2339530
21	105		21	21	441	78,5398163		21	24	0	492	87,6226522
22	110		22	22	484	78,5398163		22	25	1	538	87,3025231
23	115		23	23	529	78,5398163		23	26	0	585	86,8540502
24	120		24	24	576	78,5398163		24	27	1	635	86,5846934
25	125		25	25	625	78,5398163		25	28	0	686	86,2053024

Taux de remplissage en fonction du côté du carré, avec un pas de 5.

Et le graphique :



Taux en fonction du côté du carré, avec un pas de 5.

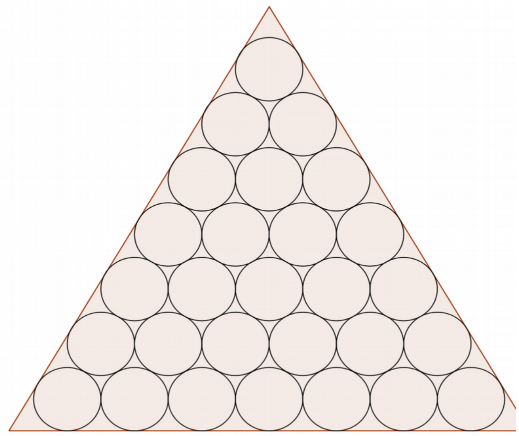
Pour le rangement en quinconce, on observe des maximums. Le rangement en quinconce permet de gagner un peu à chaque nouvelle ligne : $5-\frac{5\sqrt{3}}{2}$. A la huitième étape (carré de côté 45), on a gagné suffisamment de place pour une ligne supplémentaire (en jaune dans le tableau) : le taux est maximal. On retrouve le même phénomène à la 14ème étape, la 21ème, la 27ème, la 34ème, la 40ème… Toutes les 6 ou 7 étapes.

2 Boîte triangulaire

La boîte triangulaire équilatérale semble bien adaptée à un rangement en quinconce.

Nous avons commencé par chercher la hauteur h de la boîte en fonction de la longueur du côté l (8)afin d'obtenir l'aire du triangle A .

$$h=l\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } A=\frac{l\times h}{2}=l^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

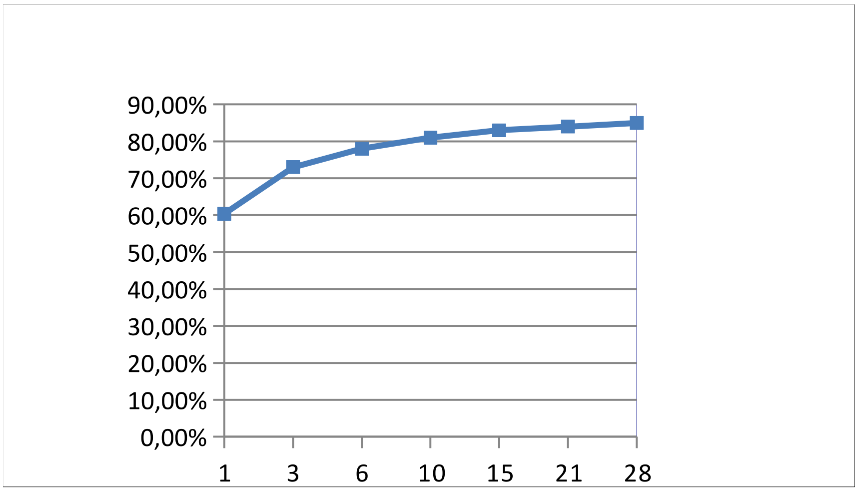


Boîte triangulaire, rangement en quinconce.

En construisant la figure sur Geogebra, nous avons déterminé les premières valeurs du taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux.

Côté de la boîte	Gâteaux	Hauteur	Aire de la boîte	Aire des gâteaux	Coefficient de remplissage
8,66	1	7,5	32,47	19,63495408	60,40 %
13,66	3	11,83	80,8	58,90486224	73,00 %
18,68	6	16,18	151,12	117,80972448	78,00 %
23,68	10	20,51	242,84	196,3495408	81,00 %
28,68	15	24,84	356,2	294,5243112	83,00 %
33,68	21	29,17	491,22	412,33403568	84,00 %
38,68	28	33,5	647,89	549,77871424	85,00 %

Taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux



Taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux.

Nous avons ensuite déterminé une formule permettant de trouver la taille de la boîte en fonction du nombre de gâteaux sur la première ligne.

n : nombre de gâteaux sur la première ligne.

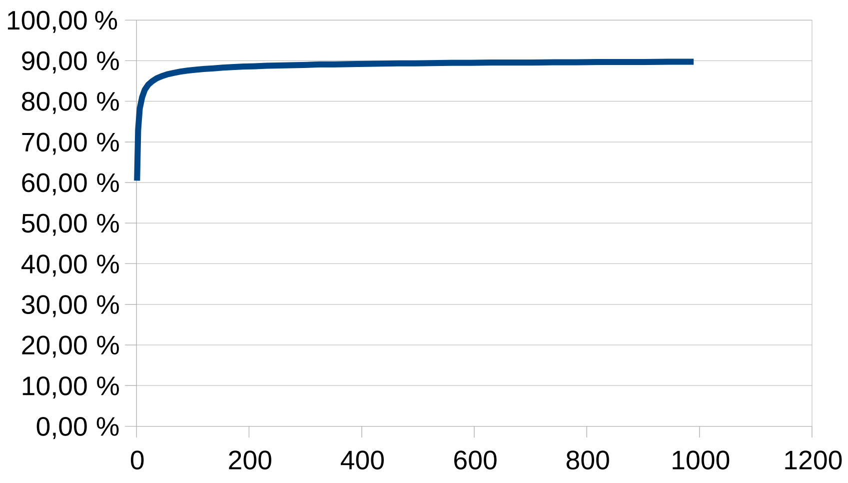
$$l=2\times\frac{2,5}{\tan(30)}+5\times(n+1)\ (9)$$

Le nombre total de gâteaux est $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$.(10)

Nous avons obtenu le tableau suivant :

Nombre de gâteaux sur la première ligne	Largeur	Hauteur	A triangle	Nombre total de gâteau	Aire des gâteaux	taux de remplissage
1	8,66025404	7,5	32,4759526	1	19,6349540849	60,46 %
2	13,660254	11,830127	80,8012702	3	58,9048622548	72,90 %
3	18,660254	16,160254	150,777223	6	117,80972451	78,13 %
4	23,660254	20,4903811	242,403811	10	196,349540849	81,00 %
5	28,660254	24,8205081	355,681033	15	294,524311274	82,81 %
6	33,660254	29,1506351	490,608891	21	412,334035784	84,05 %
7	38,660254	33,4807621	647,187384	28	549,778714378	84,95 %
8	43,660254	37,8108891	825,416512	36	706,858347058	85,64 %
9	48,660254	42,1410162	1025,29628	45	883,572933822	86,18 %
10	53,660254	46,4711432	1246,82667	55	1079,92247467	86,61 %
11	58,660254	50,8012702	1490,00771	66	1295,90696961	86,97 %
12	63,660254	55,1313972	1754,83938	78	1531,52641863	87,27 %
13	68,660254	59,4615242	2041,32168	91	1786,78082173	87,53 %
14	73,660254	63,7916512	2349,45462	105	2061,67017892	87,75 %
15	78,660254	68,1217783	2679,23819	120	2356,19449019	87,94 %
16	83,660254	72,4519053	3030,6724	136	2670,35375555	88,11 %
17	88,660254	76,7820323	3403,75724	153	3004,147975	88,26 %
18	93,660254	81,1121593	3798,49272	171	3357,57714852	88,39 %
19	98,660254	85,4422863	4214,87884	190	3730,64127614	88,51 %
20	103,660254	89,7724134	4652,91559	210	4123,34035784	88,62 %
21	108,660254	94,1025404	5112,60297	231	4535,67439362	88,72 %
22	113,660254	98,4326674	5593,94099	253	4967,64338349	88,80 %
23	118,660254	102,762794	6096,92965	276	5419,24732744	88,88 %
24	123,660254	107,092921	6621,56894	300	5890,48622548	88,96 %
25	128,660254	111,423048	7167,85886	325	6381,3600776	89,03 %
26	133,660254	115,753175	7735,79942	351	6891,86888381	89,09 %
27	138,660254	120,083302	8325,39061	378	7422,01264411	89,15 %
28	143,660254	124,41343	8936,63244	406	7971,79135848	89,20 %
29	148,660254	128,743557	9569,52491	435	8541,20502695	89,25 %
30	153,660254	133,073684	10224,068	465	9130,2536495	89,30 %

Taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux sur la première ligne.



Taux de remplissage en fonction du nombre total de gâteaux.

3 Boîte losange

L'étude de la boîte carrée montre que les taux sont meilleurs lorsque les dimensions de la boîte sont adaptées à la configuration (grille ou quinconce).

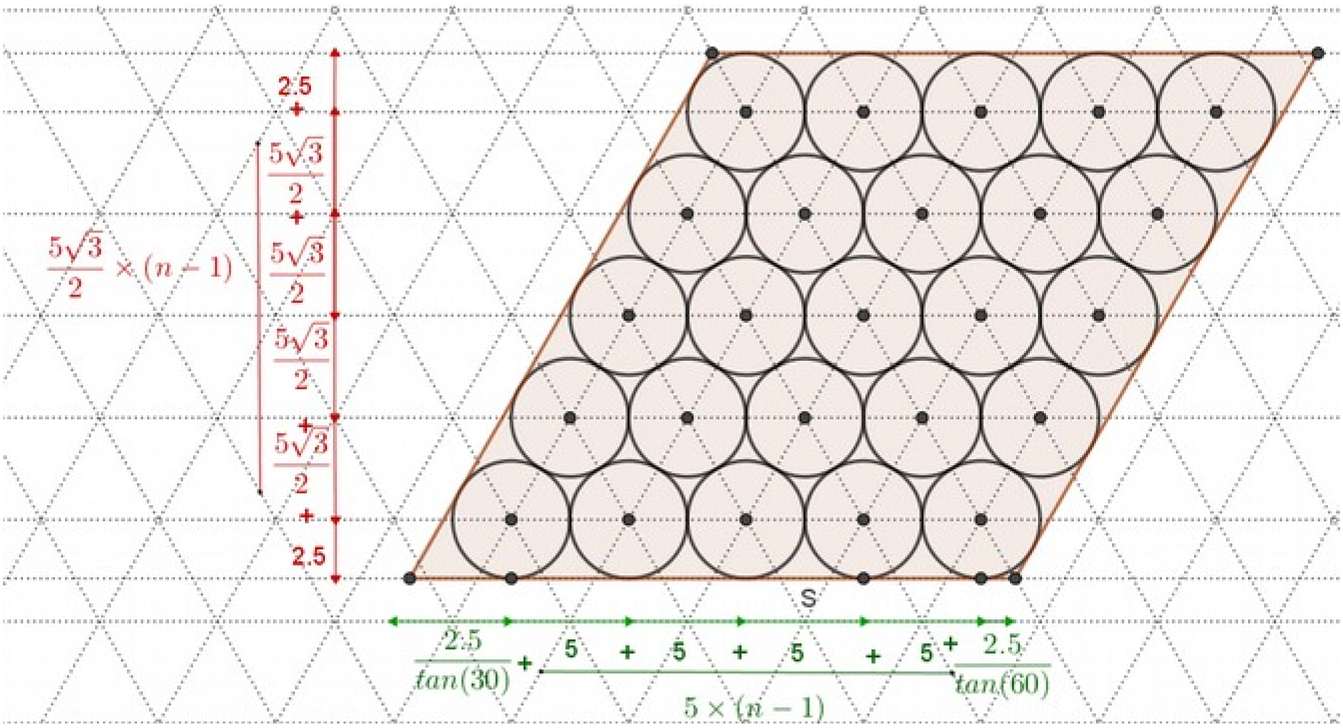
Pour la formation en grille, la boîte carrée semble bien adaptée.

Pour la formation en quinconce, nous avons cherché des boîtes plus adaptées par leurs formes et leurs dimensions.

Nous nous sommes intéressés à une boîte en losange ayant 2 angles de 60° qui semblait bien adaptée à des gâteaux en formation quinconce.

Nous avons cherché le taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux sur la première ligne (même nombre sur les colonnes).

Dans notre réflexion, nous avons vu que les centres des cercles formaient des triangles équilatéraux de cotés 5 cm et de hauteur $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.



Boîte losange.

Pour une boîte de n colonnes et n lignes:

Nombre de gâteaux : n^2

Largeur de la boîte: $l=\frac{2,5}{\tan(30)}+\frac{2,5}{\tan(60)}+5\times(n-1)$ (11)

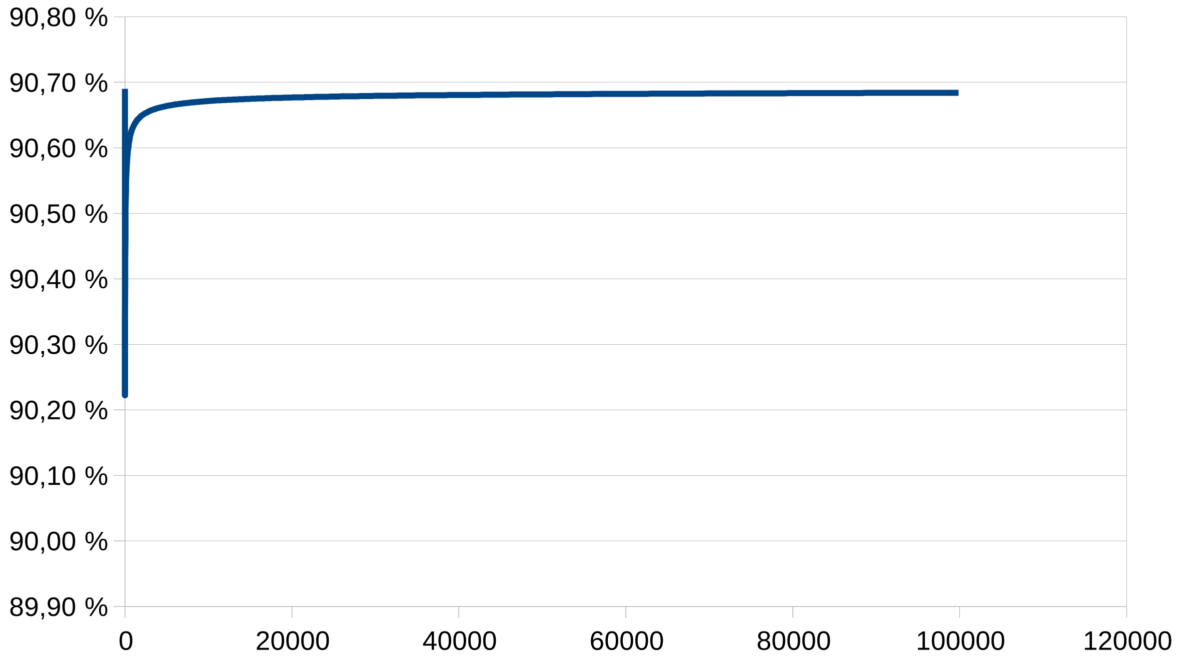
Hauteur: $h=5+\frac{5\sqrt{3}}{2}\times(n-1)$

Aire de la boîte: $l\times h$

Taux de remplissage: $\frac{6,25\times\pi\times n^2}{l\times h}$

Largeur	Hauteur	Lignes	Colonnes	Nombre de gâteaux	Taux de remplissage
4,33	5	1	1	1	90,69 %
9,33	9,33	2	2	4	90,22 %
14,33	13,66	3	3	9	90,27 %
19,33	17,99	4	4	16	90,34 %
24,33	22,32	5	5	25	90,39 %
29,33	26,65	6	6	36	90,43 %
34,33	30,98	7	7	49	90,46 %
39,33	35,31	8	8	64	90,48 %
44,33	39,64	9	9	81	90,50 %
1884,33	1633,13	377	377	142129	90,68 %
1889,33	1637,46	378	378	142884	90,69 %
2744,330127	2377,9096064	549	549	301401	90,69 %

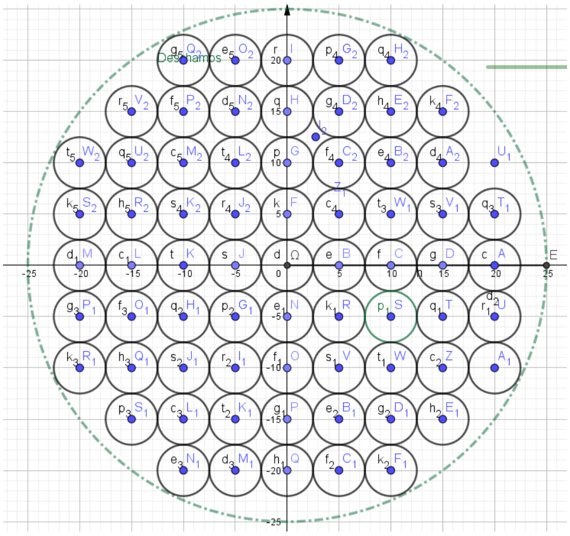
Le taux calculé pour les cas optimaux augmente mais semble finir par stagner à 90,69 %.



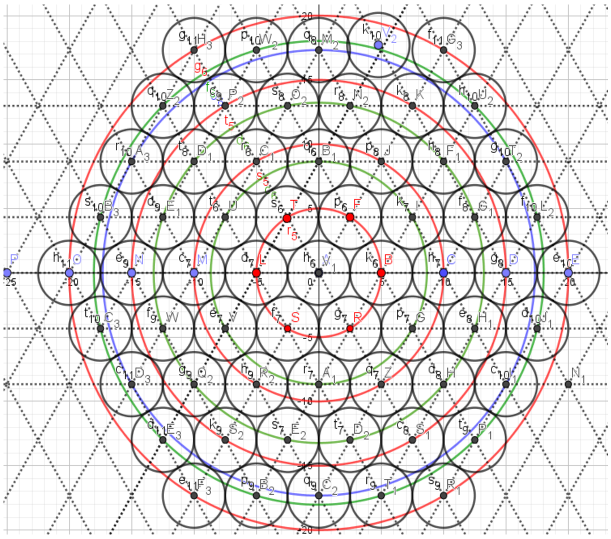
taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux.

4 Boîte circulaire

Nous avons également travaillé sur la boîte circulaire toujours avec des rangements en grille ou en quinconce.
Pour chaque type de rangement, il y a différentes façons de choisir le centre du cercle. Nous avons choisi ici de prendre un cercle centré sur un des gâteaux.



Boîte circulaire, rangement en grille.



Boîte circulaire, rangement en quinconce.

Pour le rangement en quinconce, un cercle de couleur correspond à des cercles passants par les centres des gâteaux. Il faut donc rajouter 2,5 cm à leur rayon pour obtenir le rayon de la boîte correspondante.
Les cercles rouges correspondent à des cercles passant par les centres de gâteaux situés sur la droite $y=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.(12)

Les cercles verts passent par les centres des gâteaux situés sur la droite $y=\frac{10\sqrt{3}}{2}$.

Les cercles bleus passent par les centres des gâteaux situés sur la droite $y=\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

A l'aide d'un tableur, nous avons relevé le nombre de gâteaux dans chaque figure en fonction des dimensions de la boîte.

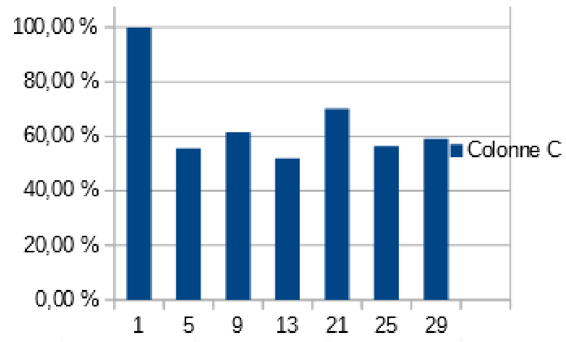
Rayon de la boîte	Nombre de gâteau	taux	Aire Boite
2,5	1	100,00 %	19,63495408
7,5	5	55,56 %	176,7145868
9,57106781186548	9	61,40 %	287,7866602
12,5	13	52,00 %	490,8738521
13,68	21	70,13 %	587,925189
16,642135623731	25	56,42 %	870,0976317
17,5	29	59,18 %	962,1127502

Taux de remplissage, rangement en grille.

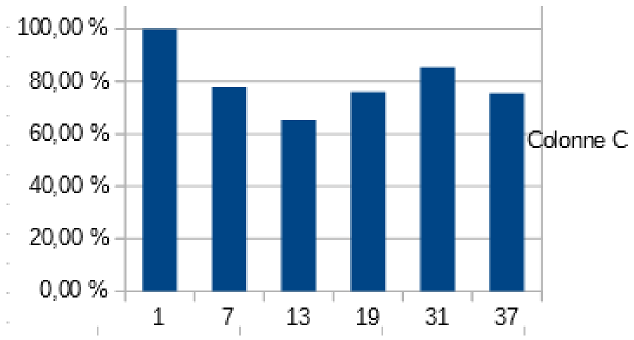
Rayon de la boîte	Nombre de gâteau	taux	Aire Boite
2,5	1	100,00 %	19,63495408
7,5	7	77,78 %	176,7145868
11,1602540378444	13	65,23 %	391,2893554
12,5	19	76,00 %	490,8738521
15,0598566870805	31	85,43 %	712,5109627
17,5	37	75,51 %	962,1127502

Taux de remplissage, rangement en quinconce.

Nous remarquons donc que pour un gâteau, la boîte circulaire est optimale (100 % de taux de remplissage). La boîte circulaire quinconce semble avoir de meilleurs taux de remplissage mais nous n’avons pas trouvé de formule pour calculer le taux de remplissage en fonction du nombre de gâteaux.



Taux de remplissage, rangement en grille.

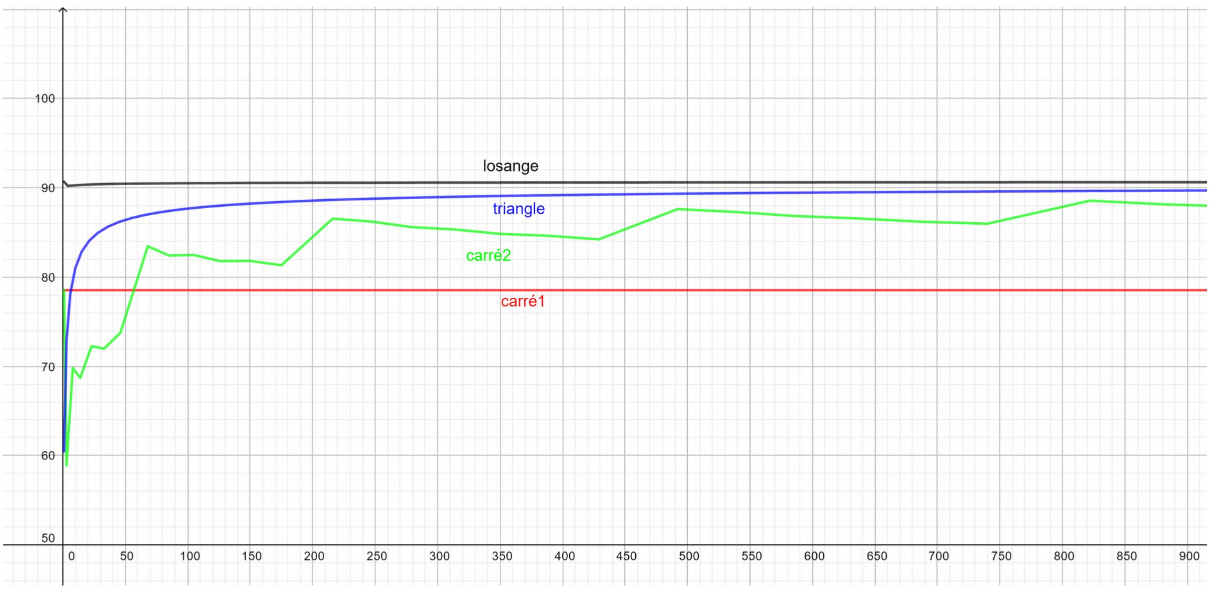


Taux de remplissage, rangement en quinconce.

Conclusion

Pour un gâteau, la meilleure boite est la boite circulaire car son taux est de 100%.

Au delà d’un gâteau, le losange est globalement meilleur comme on peut le voir sur le graphique suivant:

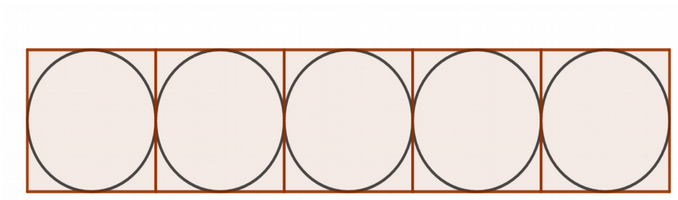


Taux en pourcentage en fonction du nombre de gâteaux dans les cas optimaux.

Mais ce graphique ne tient compte que des cas optimaux où la forme de la boîte est adaptée(13) au nombre de gâteaux.

Carré grille		Carré quinconce		Triangle quinconce		Losange quinconce	
Nb gâteaux	Taux	Nb gâteaux	Taux	Nb gâteaux	Taux	Nb gâteaux	Taux
1	78,54	1	78,54	1	60,46	1	90,69
4	78,54	3	58,90	3	72,90	4	90,22
9	78,54	8	69,81	6	78,13	9	90,27
16	78,54	14	68,72	10	81,00	16	90,34
25	78,54	23	72,26	15	82,81	25	90,39
36	78,54	33	71,99	21	84,05	36	90,43
49	78,54	46	73,73	28	84,95	49	90,46
64	78,54	68	83,45	36	85,64	64	90,48
81	78,54	85	82,42	45	86,18	81	90,50
100	78,54	105	82,47	55	86,61	100	90,52
121	78,54	126	81,79	66	86,97	121	90,53
144	78,54	150	81,81	78	87,27	144	90,55
169	78,54	175	81,33	91	87,53	169	90,56
196	78,54	216	86,55	105	87,75	196	90,57
225	78,54	247	86,22	120	87,94	225	90,57
256	78,54	279	85,60	136	88,11	256	90,58
289	78,54	314	85,33	153	88,26	289	90,59
324	78,54	350	84,84	171	88,39	324	90,59
361	78,54	389	84,63	190	88,51	361	90,60
400	78,54	429	84,23	210	88,62	400	90,60
441	78,54	492	87,62	231	88,72	441	90,60
484	78,54	538	87,30	253	88,80	484	90,61
529	78,54	585	86,85	276	88,88	529	90,61
576	78,54	635	86,58	300	88,96	576	90,61
625	78,54	686	86,21	325	89,03	625	90,62
676	78,54	740	85,98	351	89,09	676	90,62
729	78,54	822	88,56	378	89,15	729	90,62
784	78,54	880	88,16	406	89,20	784	90,63
841	78,54	941	87,88	435	89,25	841	90,63

Le losange est intéressant lorsque le nombre de gâteaux est un carré.
Pour 10, 15, 21, 28, 36… gâteaux, le triangle est le plus intéressant.
Pour 68, 85, 105…, le carré en quinconce est plus intéressant.
Lorsque le nombre de gâteaux ne fait pas partie de ces listes, on peut toujours utiliser une boîte rectangulaire en alignant les gâteaux et en les mettant dans des carrés : on obtient alors un taux de remplissage de 78,54 %.



Boîte rectangulaire pour 5 gâteaux.

Si on ne se limite plus à la géométrie plane, on peut empiler les gâteaux pour les ranger dans une boîte cylindrique : on obtient alors un taux de 100 % quelque soit le nombre de gâteaux.

Notes d'édition

(1) On peut faire le même raisonnement avec un rayon de 1 cm ce qui simplifiera les calculs mais diminuera le charme du calcul algébrique

(2) On peut se contenter de parler de côté plutôt que d'introduire le mot « base » : le triangle équilatéral n'a pas de côté privilégié.

(3) Le résultat est peut être présenté un peu rapidement. Pour mieux comprendre ce calcul, il faut s'aider de la figure page 2 : 5 sqrt(3)/2 est l'écart entre chaque ligne.

(4) Pour passer de l'inégalité précédente à cette égalité, il faut isoler "l". Après quelques opérations algébriques on arrive à une inégalité large l≤2/(5 sqrt(3)) (c-5)+1. Et l'entier qui lui est le plus proche par défaut est sa partie entière. Si cette valeur était entière ce serait ce nombre, d'où la nécessité précédemment que ce soit une inégalité large.

(5) Si on suit la justification qui suit on pourrait penser qu'il faut enlever 5 cm. En fait les 2.5 cm à gauche ne pourront jamais se réduire. Ils dépendent du gâteau de la ligne supérieure. Alors que les 2.5 cm à droite peuvent être diminués sans modifier le nombre de gâteaux sur la ligne.

(6) Ce serait intéressant de montrer que si Ent(c/2) est paire alors Ent((c-2.5)/2) l'est aussi. Cela justifierait que l'on a bien la somme de deux nombres entiers.

(7) La première ligne est alors numérotée 0. C'est d'ailleurs ce que semble indiquer la formule donnant le nombre de gâteaux. Ent(l/2)+1 est multiplié par le nombre de gâteaux de la ligne 1.

(8) Attention aux confusions : alors que dans le paragraphe précédent "l" donnait le nombre de lignes. C'était donc un entier, maintenant il représente la longueur du côté du triangle.

(9) La démonstration de cette formule nécessite quelques explications. Le 30° en particulier reste bien mystérieux. Pour mieux comprendre, il faut voir que cette formule est la somme de 2 produits. Le second correspond à la longueur des gâteaux, le premier représente la distance de chaque côté (comme il y avait 2.5 cm dans le carré précédent). C'est ce premier produit qui reste à déterminer. Faites un zoom sur sommet en bas à gauche du triangle par exemple. Vous constatez que l'on a un cercle tangent à l'angle de 60° du triangle. Le centre de ce cercle est donc sur la bissectrice. L'angle formé par le côté et la droite passant par le sommet et le centre du cercle, mesure donc 30°. On a aussi un triangle rectangle quand on projette le centre sur le côté du triangle. Dans ce triangle tan 30°=rayon/la longueur "au sol". Cette dernière est celle que l'on cherche et vaut 2.5/tan 30°. Elle est présente des deux côtés d'où le produit par 2.

(10) Résultat qui est vu en 1re avec les suites. La démonstration n'est pas très compliquée notamment avec un dessin.

(11) Dans cette expression on retrouve l'angle de 30°. La justification reste proche du cas précédent mais on utilise une autre propriété : les diagonales d'un losange sont aussi les bissectrices des angles. Cela permet aussi de justifier l'angle de 60°.

(12) L'idée est intéressante : il s'agit de constater que les centres sont alignés sur des droites parallèles à l'axe des ordonnées espacées de la hauteur d'un triangle équilatéral. Ils sont aussi sur des cercles concentriques. Mais la présentation amène à une confusion. Peut être qu'en exploitant ces deux pistes séparément arrivera-t-on à des résultats intéressants. Ces remarques traduisent deux façons de remplir la boite : en ligne ou en cercle concentrique. Les deux semblent donner la même configuration finale.

(13) Mais qu'est ce qu'une boite bien adaptée ?