

La valse des polygones

Année 2020 – 2021

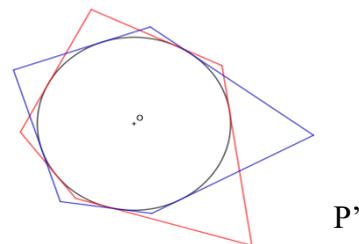
Élèves de 3^{ème} : Jules GUERIN et Diduan LE BLAY.

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Enseignante : Florence FERRY.

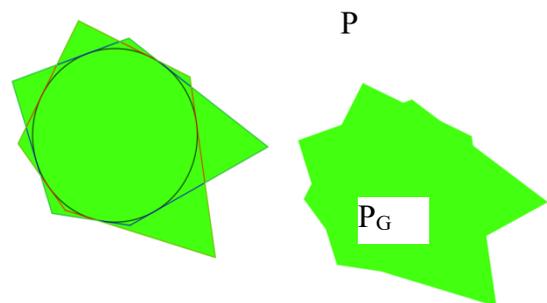
Chercheur : Olympio HACQUARD.

Le sujet : On construit un polygone P dont tous les côtés sont tangents à un cercle de centre O . On construit ensuite un polygone P' en faisant tourner P autour de O .

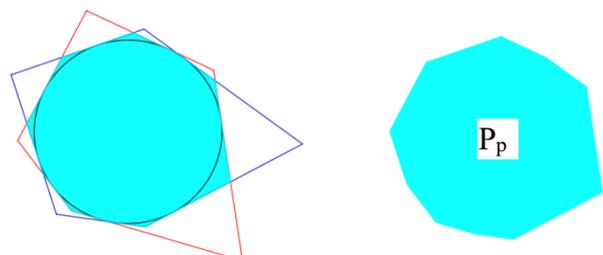


À partir de P et P' on obtient deux nouvelles figures :

- le « grand » polygone appelé P_G qui est l'union des deux polygones.



- le « petit » polygone P_p qui est l'intersection des deux.

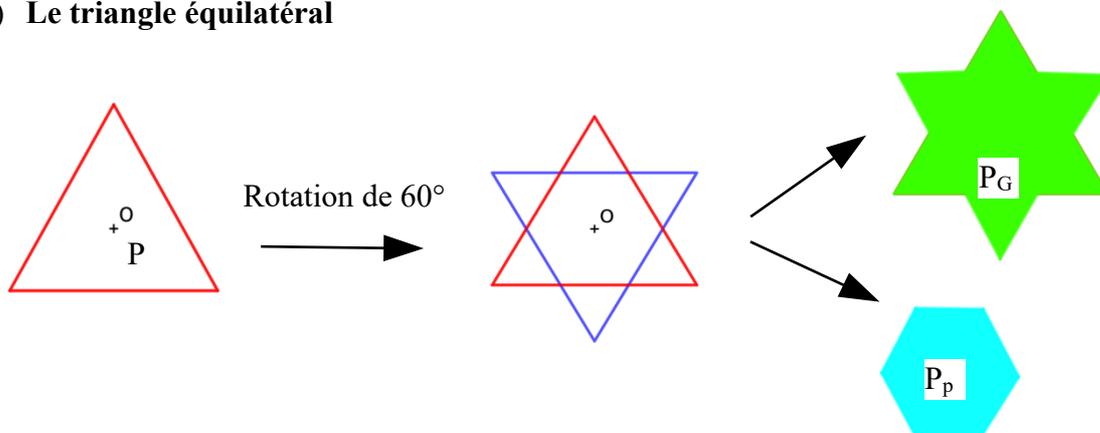


Etudier les différentes propriétés (formes possibles, périmètres, aires) des « grand » et « petit » polygones obtenus.

I – Etude des formes 1

Pour commencer notre recherche, nous allons nous intéresser à la nature des « grand » et « petit » polygones obtenus. Nous allons étudier des figures simples avec une rotation particulière.

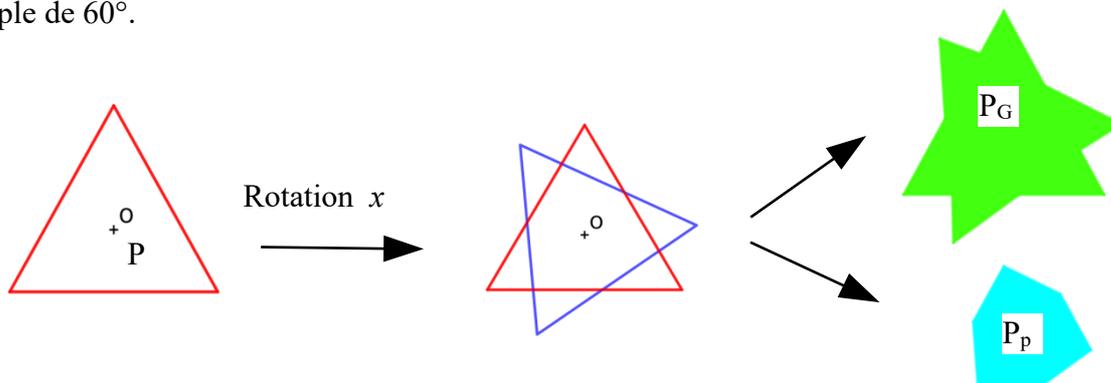
1) Le triangle équilatéral



Conclusion : P_G a 12 côtés et P_P en a 6 ; les deux polygones obtenus sont réguliers.

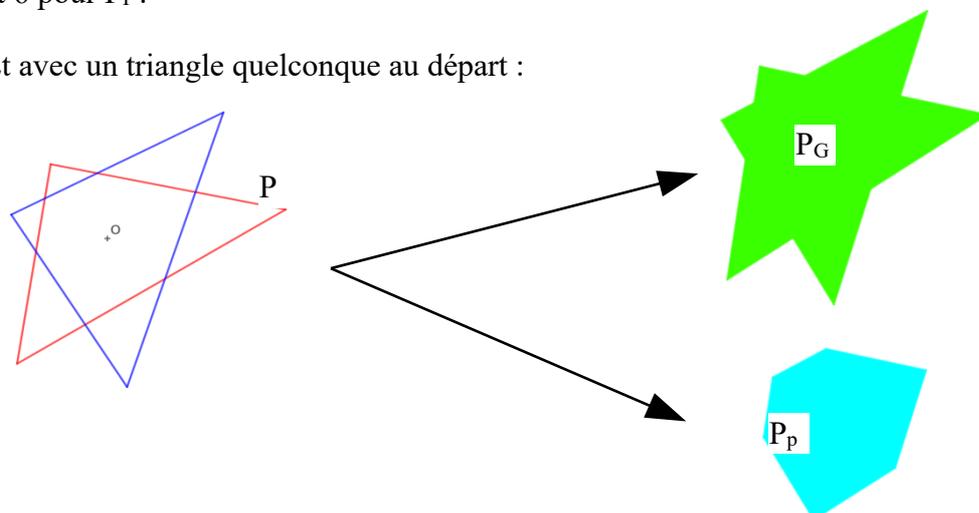
Remarque : lorsqu'on effectue une rotation de 120° , qui correspond à l'angle au centre du polygone régulier de départ, la figure reste inchangée ; P, P', P_G et P_P sont confondus.

Observons maintenant ce qu'il se passe si on fait une rotation d'angle x quelconque, autre qu'un multiple de 60° .



Conclusion : Les polygones obtenus ne sont pas réguliers mais nous avons encore 12 côtés pour P_G et 6 pour P_P .

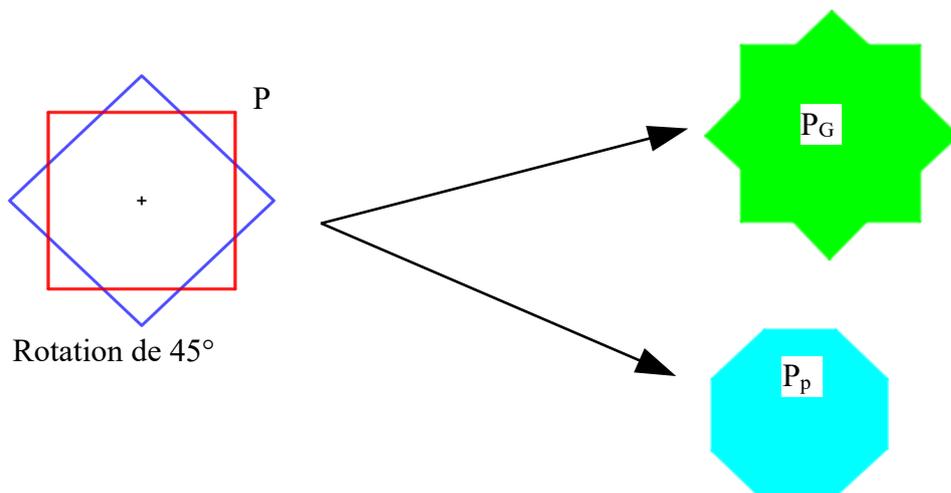
Et avec un triangle quelconque au départ :



La conclusion reste la même.

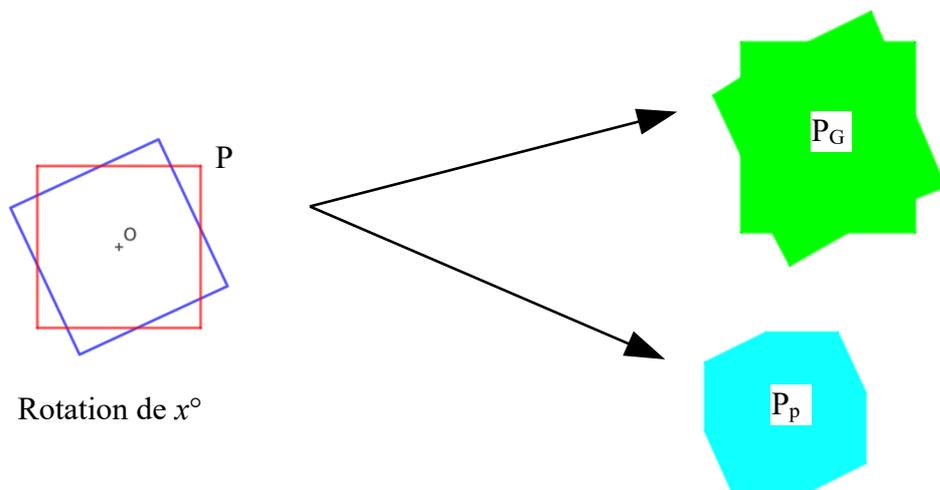
2) Le carré

Avec une rotation de 90° , qui correspond à l'angle au centre, il ne se passe rien.



Conclusion : Les polygones obtenus sont réguliers ; nous comptons 16 côtés pour P_G et 8 pour P_p .

Si la rotation est d'angle x quelconque, autre qu'un multiple de 45° :



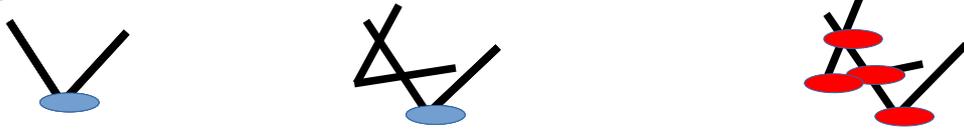
Conclusion : Les polygones obtenus ne sont pas réguliers mais nous avons encore 16 côtés pour P_G et 8 pour P_p .

Après ces exemples, nous avons émis 2 conjectures :

Conjecture 1 : Lorsque P est un polygone régulier d'angle au centre x et que l'angle de rotation est $x/2$ (ou un multiple de $x/2$) alors P_G et P_p sont aussi des polygones réguliers ; en particulier si l'angle de rotation est x , alors la figure reste identique : P , P_G et P_p sont confondus.

Conjecture 2 : Si P a n côtés alors P_G a $4n$ côtés et P_p en a $2n$. (sauf pour les cas où la figure de départ et celle d'arrivée sont confondues).

Regardons de plus près et tentons d'expliquer cette dernière conjecture. On va se concentrer sur un sommet du polygone de départ ; après la rotation, ce sommet en a « produit » 4 pour le grand polygone :

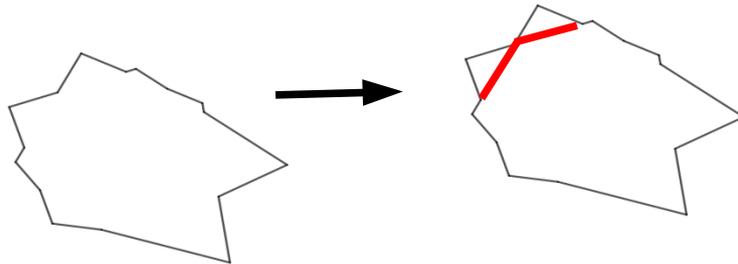


Au départ

Après la rotation

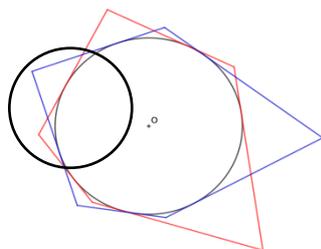
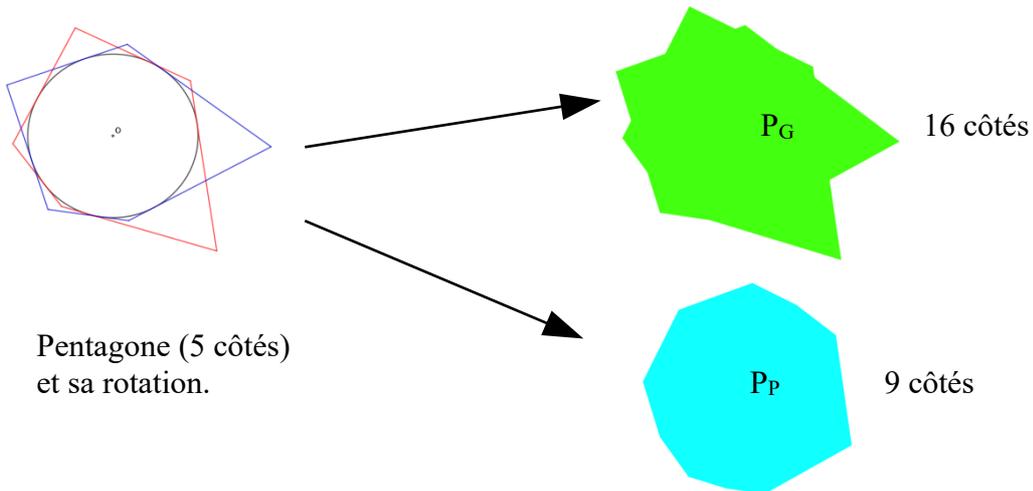
Sommets engendrés sur P_G

Maintenant, en joignant un sommet sur deux, on divise par 2 le nombre de côtés de P_G pour avoir le nombre de sommets de P_P .



Malheureusement, à force de chercher, nous avons trouvé un contre-exemple qui rend notre conjecture 2 fausse. (2)

Nous avons pris un pentagone quelconque.



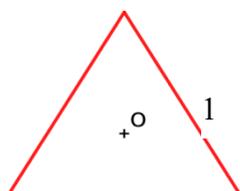
Ici par exemple, nous pouvons constater que le sommet du polygone de départ (en rouge) se retrouve à « l'intérieur », il ne va donc pas donner les 4 sommets attendus.

II – Etude des périmètres et des aires

Reprenons notre étude avec des figures particulières. Nous cherchons une relation entre le périmètre de P et ceux de P_G et P_p ; de même pour l'aire des trois figures.

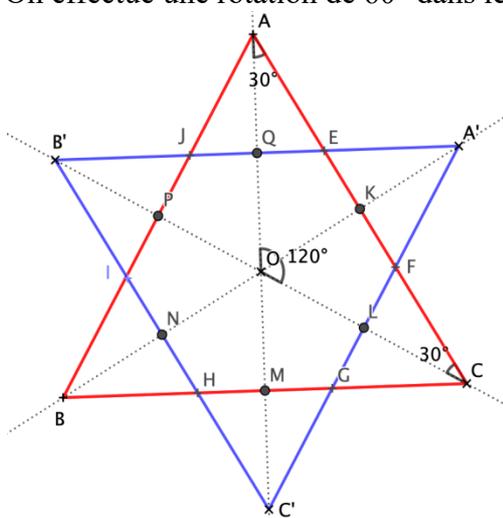
1) Triangle équilatéral de côté 1

Commençons par observer les périmètres. (3)



Périmètre de P : 3

On effectue une rotation de 60° dans le sens horaire.



Avec les noms donnés aux points sur la figure ci-contre :

[AO] et [OC] sont les rayons du cercle circonscrit à ABC donc : $AO = OC$.

AOC est donc isocèle en O et donc les angles de la base sont de même mesure ; de plus la somme des angles d'un triangle fait 180° donc :

$$\widehat{AOC} = 120^\circ \quad (4)$$

C'est l'angle au centre de P .

$$\widehat{KOC} = 60^\circ \text{ angle de rotation}$$

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = (180 - 120) : 2 = 30^\circ$$

$$\widehat{OKC} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

et

$$\widehat{OKA} = 90^\circ$$

$$\text{Donc : } \widehat{QEK} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Avec un raisonnement identique pour chacun des sommets, on démontre que tous les angles de P_p , qui est un hexagone, sont tous égaux à 120° .

Par la rotation :

Les images de [IJ], [JE], [EF], [FG], [GH] et [HI] sont respectivement : [JE], [EF], [FG], [GH], [HI] et [IJ]. La rotation conserve les longueurs donc : $IJ = EF = FG = GH = HI$.

Finalement, P_p a tous ses angles de même mesure et tous ses côtés de même longueur donc c'est un hexagone régulier.

$$\widehat{A'EF} = \widehat{EFA'} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \quad \widehat{EA'F} = 60^\circ$$

(A'B'C' est équilatéral comme ABC)

A'EF est donc un triangle équilatéral de même que FCG, GC'H, HBI, IB'J et JAE. Comme P_p a tous ses côtés de même longueur, P_G a également tous ses côtés de même longueur et son périmètre est bien deux fois plus grand que P_p .

Calcul des périmètres : $AE = EF = FC$ donc $EF = \frac{1}{3}$

Donc le périmètre de P_p est : $\frac{1}{3} \times 6 = 2$ et celui de P_G est : $2 \times P_p = 4$.

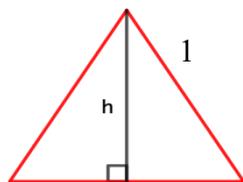
Conclusion :

$$\text{Périmètre de } P_G = 2 \times \text{périmètre de } P_p$$

$$\text{Périmètre de } P_p = \frac{2}{3} \times \text{périmètre de } P$$

$$\text{Périmètre de } P_G = \frac{4}{3} \times \text{périmètre de } P$$

Nous nous intéressons maintenant aux aires

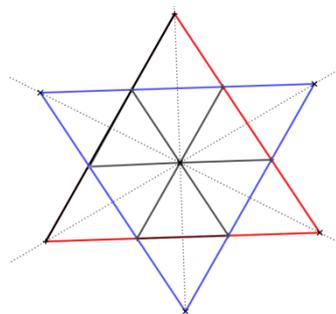


On trace une hauteur du triangle, on appelle h sa longueur.
D'après le théorème de Pythagore :

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

On peut donc calculer l'aire :



On découpe le triangle de départ en 9 triangles égaux.
On peut donc calculer l'aire :

$$\text{Aire de } P_G : 12 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Aire de } P_p = 6 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

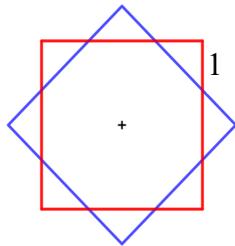
Conclusion :

$$\text{Aire de } P_G = 2 \times \text{aire de } P_p ; \text{ Aire de } P_p = \frac{2}{3} \times \text{Aire de } P \text{ et } \text{Aire de } P_G = \frac{4}{3} \times \text{aire de } P$$

On remarque que ce sont les mêmes résultats que pour le périmètre ; pour une rotation quelconque, nous n'avons pas retrouvé ces résultats : nous sommes encore en train de chercher une formule dans ce cas.

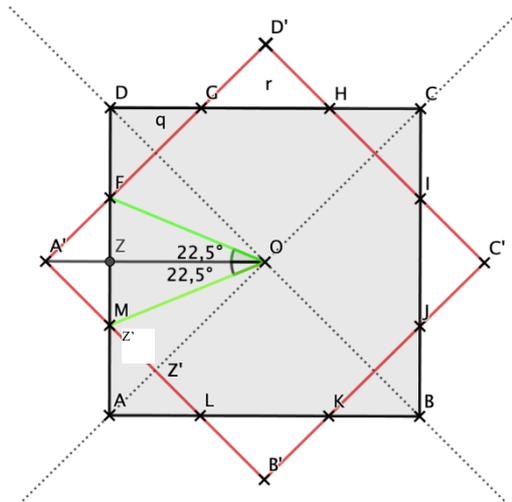
2) Le carré de côté 1

On effectue une rotation de 45° dans le sens horaire.



Périmètre de P : 4

Aire de P : 1



Avec données portées sur la figure ci-contre :

Dans le carré obtenu par rotation, $A'B'C'D'$:

$$\widehat{OA'B'} = 45^\circ$$

On a aussi

$$\widehat{A'ZM} = 90^\circ$$

La somme des angles d'un triangle fait 180° donc, dans le triangle $A'ZM$ on a :

$$\widehat{A'MZ} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

On a de même $\widehat{AML} = 45^\circ$ $\widehat{AML} = 45^\circ$

$A'ZM$ et $AZ'M$ ont chacun deux angles de 45° , ce sont des triangles isocèles et on a :

$$A'Z = ZM \text{ et } AZ' = Z'M.$$

De plus, par rotation, $[A'Z]$ est l'image de $[AZ']$ donc : $A'Z = AZ'$.

Finalement : $ZM = Z'M$. M est donc un point de la bissectrice de $\widehat{ZOZ'}$, donc $[OM)$ est cette bissectrice et $\widehat{ZOM} = 22,5^\circ$.

Dans FOZ rectangle en Z : $\tan 22,5^\circ = FZ/OZ$ d'où : $\tan 22,5^\circ = FZ/(1/2)$ et donc :

$$FZ = \tan 22,5^\circ / 2$$

On en déduit le périmètre de P_p : $16FZ = 8 \tan 22,5^\circ$ ce qui fait environ 3,3.

$A'FZ$ est rectangle en Z, d'après le théorème de Pythagore : $A'F = \sqrt{2 \times \left(\frac{\tan 22,5^\circ}{2}\right)^2}$.

On en déduit le périmètre de P_G : $16 A'F = 16 \times \frac{\tan 22,5^\circ}{2} \sqrt{2} = 8 \sqrt{2} \tan 22,5^\circ$

Conclusion : Périmètre de P : 4 ; périmètre de P_p : $8 \tan 22,5^\circ$ et

périmètre de P_G : $8 \sqrt{2} \tan 22,5^\circ$

Calcul des aires. Aire de OFZ : $\frac{OZ \times FZ}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\tan 22,5^\circ}{2}}{2} = \frac{\tan 22,5^\circ}{8}$

On en déduit l'aire de P_p : $\frac{\tan 22,5^\circ}{8} \times 16 = 2 \times \tan 22,5^\circ$

En faisant la différence entre l'aire de P et celle de P_p , on obtient l'aire des quatre triangles rectangles $A'FM$, $GD'H$, $IC'J$ et $KB'L$; cette aire est de : $1 - 2 \times \tan 22,5^\circ$

En ajoutant à cette aire, l'aire de P , on obtient l'aire de P_G qui est donc : $1 + 1 - 2 \times \tan 22,5^\circ = 2 - 2 \times \tan 22,5^\circ$

Conclusion : Aire de P : 1 ; aire de P_p : $2 \tan 22,5^\circ$ et aire de P_G : $2 - 2 \tan 22,5^\circ$

Nous n'avons pas trouvé de conjecture reliant ces périmètres et ces aires ; de plus, en changeant d'angle, on ne retrouve pas ces résultats. (5)

Nous remercions notre chercheur de nous avoir accompagné lors de nos recherches tout au long de l'année..

Notes d'édition

(1) : Les conclusions énoncées dans cette partie sont basées sur des observations de dessins et ne sont pas démontrées.

(2) : La communauté scientifique se réjouit au contraire que vous ayez trouvé un contre-exemple plutôt que de présenter une conjecture fautive au lecteur.

(3) : Le paragraphe qui suit a pour but de démontrer que P_G et P_p sont des polygones réguliers. L'édition regrette le manque de clarté de certains passages.

(4) : Déduction confuse, \widehat{AOC} est l'angle au centre donc mesure $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

Le triangle étant isocèle, les deux autres angles mesurent $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

(5) : Questions pour prolonger la recherche :

1) Démontrer que $\text{Aire}(P_G) = 2 \text{ Aire}(P) - \text{Aire}(P_p)$

2) On a toujours $\text{Aire}(P_G) < 2 \times \text{Aire}(P)$.

Peut-on trouver une figure et un angle tels que $\text{Aire}(P_G) > 1,9 \text{ Aire}(P)$? $\text{Aire}(P_G) > 1,99 \text{ Aire}(P)$?

Même question avec les périmètres.