Une suite à 4 chiffres

Lycée de Pézenas 2005

Sujet :

Prenons un nombre entier appartenant à l'intervalle I =[1000 ;10000[, C'est à dire des nombres à 4 chiffres .

Puis ce nombre ABCD , on le « retourne » et le lui soustrait : ABCD – DCBA . On prend la valeur absolue , c'est à dire que l'on calcule l'écart , et on recommence ainsi de suite .

On observe 2 cas différents :

1 -Le résultat final obtenu est 0.

4117
-7114
- 2997

On prend la valeur absolue

2997
-7992
-4995

On prend la valeur absolue

4995
-5994
-999

On prend la valeur absolue

999
- 999
0

2- Le résultat final obtenu est une boucle .

2178
-8721
-6534

On prend la valeur absolue

6534
-4356
2178

Et ces opérations se répètent en boucle …

Problématique :

« Peut-on prévoir dans quel cas le résultat des soustractions successives est 0 et dans quel cas ce résultat est une boucle ? »

ж De-là , nous avons créé un tableau composé de tout les nombres appartenant à notre ensemble de définition afin de marquer le résultat de leurs soustractions successives.

Ж Au bout de quelques centaines de calculs , nous avons décidé de créer un programme à la calculatrice afin d'aller plus vite .

➡ ***Notre programme :***	➡ ***Un exemple d'utilisation :***
: Input N *: Lbl 1* *: int (N / 1000) → A* *: N – 1000 × A → N* *: int (N / 100) → B* *: N – 100 × B → N* *: int (N / 10) → D* *: N – 10 × C → C* *: 1000 × A + 100 × B + 10 × C + D – (1000 × D + 100 × C +10 × B + A)* *: abs (N) → N* *: Disp N* *: Pause* *: If N > 999* *: Then* *: Goto 1* *: Else* *: End*	▪ *N = 3548* ▪ *3548 / 1000 = 3,548 → Partie entière → 3 = A* ▪ *3548 – 3 × 1000 = 548* ▪ *548 /100 = 5,48 → Partie entière → 5 = B* ▪ *48 / 10 = 4,8 → Partie entière → 4 = C* ▪ *48 – 4 × 10 = 8 = D* ▪ *1000 × 3 +100 × 5 + 10 × 4 + 8 – (1000 × 8 +100 × 4 + 10 × 5 + 3)= (-4905)* ▪ *Valeur absolue | - 4905 | = 4905* ▪ *Afficher N sur la calculatrice* ▪ *Si N > 999 , on renvoie le nombre obtenu au début du programme et ainsi de suite : c'est le cas ici .* ▪ *Si N < 999 , c'est fini , le résultat est 0 . (Résultat d'un sujet traité l'année dernière).*

➡ ***Nous avons rempli le cahier avec les résultats du programme .***

Les premières observations ont été sur le fait que lorsqu'il apparaît une boucle , c'est un multiple de 11 .

<u>Conjecture</u> :le fait que le nombre soit un multiple de 11 est condition nécessaire mais pas suffisante car tous les multiples de 11 ne forment pas une boucle au terme des soustractions .

➡ ***Nous avons remarqué dans un deuxième temps que les restes des soustractions successives étaient récurrents . Donc par un calcul , nous avons déterminé tous les restes possibles :***

Soit $N = ABCD$ avec A, B, C et D appartenant à $[0 ; 9]$:(un nombre à 4 chiffres)

$$\begin{aligned} ABCD - DCBA &= A \times 1000 + B \times 100 + C \times 10 + D - (D \times 1000 + C \times 100 + B \times 10 + D) \\ &= A \times 1000 - D \times 1000 + B \times 100 - C \times 100 + C \times 10 - B \times 10 + D - A \\ &= 1000(A - D) + 100(B - C) + 10(C - B) + 1(D - A) \\ &= 1000(A - D) + 1(D - A) + 100(B - C) + 10(C - B) \\ &= 1000(A - D) - 1(A - D) + 100(B - C) - 10(B - C) \\ &= (1000 - 1)(A - D) + (100 - 10)(B - C) \\ &= 999(A - D) + 90(B - C) \end{aligned}$$

Les restes possibles sont donc de la forme : $999(A - D) + 90(B - C)$

Tableau :

- **Colonnes : valeurs prises par $(A - D)$**
- **Lignes : valeurs prises par $(B - C)$**

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	9801	8802	7803	6804	5805	4806	3807	2808	1809	810
8	9711	8712	7713	6714	5715	4716	3717	2718	1719	720
7	9621	8622	7623	6624	5625	4626	3627	2628	1629	630
6	9531	8532	7533	6534	5535	4536	3537	2538	1539	540
5	9441	8442	7443	6444	5445	4446	3447	2448	1449	450
4	9351	8352	7353	6354	5355	4356	3357	2358	1359	360
3	9261	8262	7263	6264	5265	4266	3267	2268	1269	270
2	9171	8172	7173	6174	5175	4176	3177	2178	1179	180
1	9081	8082	7083	6084	5085	4086	3087	2088	1089	90
0	8991	7992	6993	5994	4995	3996	2997	1998	999	0
-1	8901	7902	6903	5904	4905	3906	2907	1908	909	-90
-2	8811	7812	6813	5814	4815	3816	2817	1818	819	-180
-3	8721	7722	6723	5724	4725	3726	2727	1728	729	-270
-4	8631	7632	6633	5634	4635	3636	2637	1638	639	-360
-5	8541	7542	6543	5544	4545	3546	2547	1548	549	-450
-6	8451	7452	6453	5454	4455	3456	2457	1458	459	-540
-7	8361	7362	6363	5364	4365	3366	2367	1368	369	-630
-8	8271	7272	6273	5274	4275	3276	2277	1278	279	-720
-9	8181	7182	6183	5184	4185	3186	2187	1188	189	-810

***Remarque** : (A – D) et (B – C) appartiennent à [-9 ; 9] car A, B , C et D appartiennent à [o ; 9] .*

Mais nous avons divisé le tableau en 2 car | N – N' |=|N' – N | et donc on peut décider que A>D.

→ L'écart est le même .

L'intérêt de ce tableau est en fait de réduire notre étude du départ qui comportait 8999 nombres à l'étude de 190 nombres .

On a conjecturé que ceux qui bouclent sont des multiples de 11 , on va donc les étudier :

$$A \times 1000 + B \times 100 + C \times 10 + D$$
$$= A\,(1001 - 1) + B(99 + 1) + C(11 - 1) + D$$
$$= A \times 11 \times 91 - A + B \times 9 \times 11 + B + C \times 11 - C + D$$

⇨ ***$A \times 11 \times 91$; $B \times 9 \times 11$; $C \times 11$ sont des multiples de 11***

Alors ABCD est un multiple de 11 si et seulement si (D – A)+(B – C) est un multiple de 11 , à savoir soit 11 , soit 0 ou soit – 11 .

⇨ ***(D – A)+(B – C) = 0***

ssi A – D = B – C

⇨ ***(D – A)+(B – C) = - 11***

s = A – D

r = B – C ⇨ avec s – r = 11

Faire le contraire pour (D – A)+(B – C) = 11

Pour récapituler , ABCDest un multiple de 11 si et seulement si A - D et B – C prennent les valeurs suivantes :

(A – D)	(B – C)
9	9
8	8
7	7
6	6
5	5
4	4
3	3
2	2
1	1
6	- 5
5	- 6
4	- 7
7	- 4
2	- 9
9	- 2
8	- 3

			3		- 8					
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	9801	8802	7803	6804	5805	4806	3807	2808	1809	810
8	9711	8712	7713	6714	5715	4716	3717	2718	1719	720
7	9621	8622	7623	6624	5625	4626	3627	2628	1629	630
6	9531	8532	7533	6534	5535	4536	3537	2538	1539	540
5	9441	8442	7443	6444	5445	4446	3447	2448	1449	450
4	9351	8352	7353	6354	5355	4356	3357	2358	1359	360
3	9261	8262	7263	6264	5265	4266	3267	2268	1269	270
2	9171	8172	7173	6174	5175	4176	3177	2178	1179	180
1	9081	8082	7083	6084	5085	4086	3087	2088	1089	90
0	8991	7992	6993	5994	4995	3996	2997	1998	999	0
-1	8901	7902	6903	5904	4905	3906	2907	1908	909	-90
-2	8811	7812	6813	5814	4815	3816	2817	1818	819	-180
-3	8721	7722	6723	5724	4725	3726	2727	1728	729	-270
-4	8631	7632	6633	5634	4635	3636	2637	1638	639	-360
-5	8541	7542	6543	5544	4545	3546	2547	1548	549	-450
-6	8451	7452	6453	5454	4455	3456	2457	1458	459	-540
-7	8361	7362	6363	5364	4365	3366	2367	1368	369	-630
-8	8271	7272	6273	5274	4275	3276	2277	1278	279	-720
-9	8181	7182	6183	5184	4185	3186	2187	1188	189	-810

Si un nombre est un multiple de 11 , il est représenté en couleur : jaune , rose et bleu .

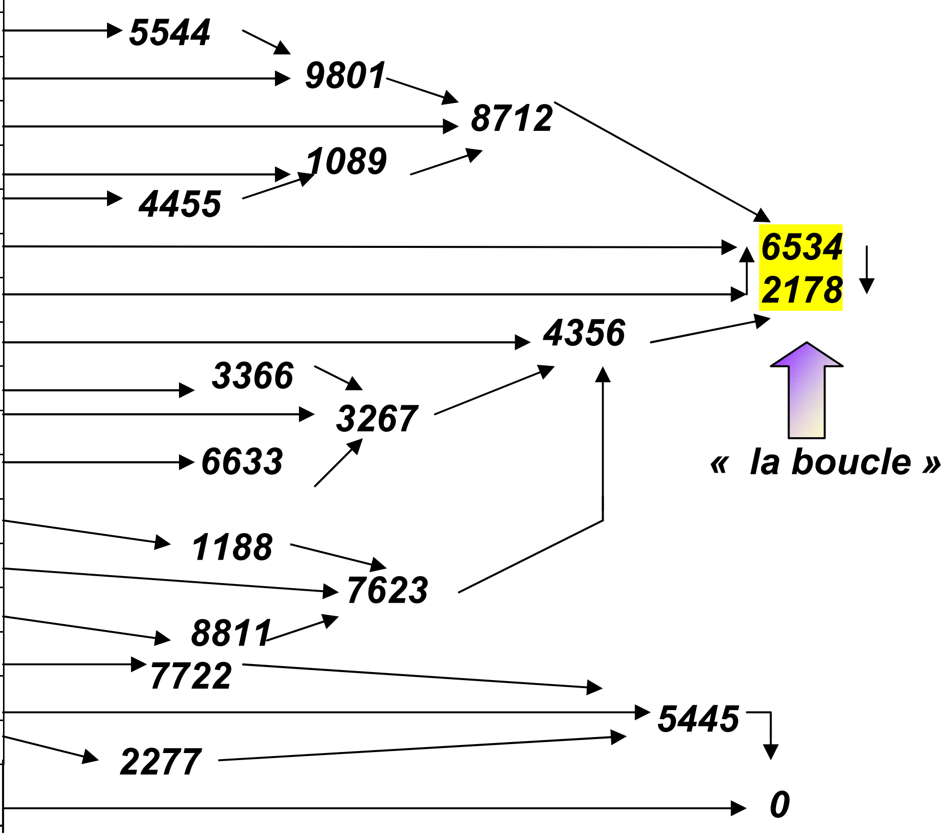
S'il donne un nombre rose ou bleu , alors le résultat final est une boucle .

S'il donne un nombre jaune , alors le résultat final est 0 .

S'il n'est pas un multiple de 11 , il donne un nombre blanc .Ces 172 nombres blancs ont été testés et leur résultat final est un 0 .

Schéma bilan :

(A– D)	(B – C)
6	- 5
9	9
8	8
1	1
5	- 6
6	6
2	2
4	4
4	- 7
3	3
7	- 4
2	- 9
7	7
9	- 2
8	-3
5	-5
3	- 8
Autres	



Pour finir , prenons un nombre au hasard : 4552
(Je fais le calcul de A – D et B – C) : A – D = 4 – 2 = 2
B – C = 5 – 5 = 0
Il n'appartient pas au tableau des multiples de 11 donc il ne peut assurément pas être un nombre qui boucle .

Nous pouvons aussi construire des nombres de telle sorte que par exemple ils fassent une boucle en prenant dans le schéma bilan les valeurs de A –D et B – C:
A – D = 2 on peut prendre A = 5 et D= 3
B – C = -9 on peut prendre B =0 et C= 9
Ce qui fait le nombre 5093, ce qui est un nombre qui boucle .

BLASQUEZ Virginie TS
HERSENT Quentin 2 nde