ALGORITHME DE KAPREKAR

Année 2018 - 2019

Élèves de 4ème : LESAGE Margot, MEZINE Nouara, PEREZ Eva, VICQ Eugénie.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence Ferry et Claudie Asselain.
Chercheur : Raphaël Tinarrage.

Le sujet : L'algorithme de Kaprekar est un processus qui transforme un nombre entier en un autre. Il fonctionne de la façon suivante : soit *n* un nombre entier. Soit *n'* le nombre obtenu en rangeant les chiffres de *n* dans l'ordre décroissant, et *n''* le nombre obtenu en les rangeant dans l'ordre croissant. L'Algorithme de Kaprekar rend alors le nombre *n' – n ''*. On itère le processus.
Qu'observe-t-on si on part d'un nombre à deux chiffres ? à trois chiffres ? à quatre chiffres ?

I – Nombres à un chiffre

Soit a un nombre entier à un chiffre. Dès la première étape de l'algorithme, on obtient a – a = 0.
Les nombres à un chiffre donnent donc de façon évidente 0 en une seule étape.

II – Nombres à deux chiffres

Exemple : Prenons n = 67
On réorganise ses chiffres dans l'ordre décroissant : n' = 76 puis dans l'ordre croissant : n'' = 67.
On applique ensuite l'algorithme de Kaprekar sur n puis sur les résultats des soustractions effectuées :

$$\begin{array}{r} 76 \\ -\ \underline{67} \\ 09 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ -\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

On arrive à 0 en deux étapes.

Voici un deuxième exemple : n = 42 d'où n' = 42 et n'' = 24

$$\begin{array}{r} 42 \\ -\ \underline{24} \\ 18 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 81 \\ -\ \underline{18} \\ 63 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 63 \\ -\ \underline{36} \\ 27 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 72 \\ -\ \underline{27} \\ 45 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 54 \\ -\ \underline{45} \\ 09 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 9 \\ -\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

On arrive de nouveau à 0.

Cas particulier :

$$\begin{array}{r} 66 \\ -\ \underline{66} \\ 0 \end{array}$$

Si n a deux chiffres égaux, nous arrivons à 0 en une seule étape ; en effet, n' et n'' sont égaux et n' – n'' = 0.

Après avoir appliqué l'algorithme sur de nombreux nombres à 2 chiffres nous avons pu faire des conjectures.

Conjectures :
1 – La somme des chiffres des différences effectuées à chaque étape est égale à 9.
2 – L'algorithme de Kaprekar appliqué à un nombre à deux chiffres amène à 0.

Démonstrations :

1 – Soit n un entier formé avec les chiffres a et b dans cet ordre. On notera n ainsi : ’’ab’’.
On suppose que a > b. (Le cas a = b donne 0 en une étape comme démontré ci-dessus)

$$\begin{array}{r} a\ b \\ -\ \underline{b\ a} \\ d\ c \end{array}$$

On a : b < a donc c = (b + 10) – a et donc d = a – (b + 1).

On a donc : c + d = (b + 10) – a + a – (b + 1) = b +10 – a + a – b – 1= 10 – 1 = 9
Notre conjecture 1 est bien démontrée.

2 – D’après la première conjecture que nous venons de démontrer, l’algorithme de Kaprekar appliqué à un nombre quelconque « ab » donnera à la première étape les seuls cas suivants :
09 – 18 – 27 – 36 – 45 – 54 – 63 – 72 – 81 – 90
Il suffit donc d’appliquer l’algorithme sur les 5 premiers cas puisque les 5 suivants vont donner les mêmes nombres n’ et n’’ à l’étape suivante. Par exemple, 36 et 63 vont donner, à l’étape suivante, le même calcul. En effet, 36 et 63 sont composés des même chiffres, donc si on réorganise leurs chiffres dans l'ordre décroissant puis croissant cela donnera pour les deux : n’ = 63 et n’’ = 36.

Nous avons donc appliqué l'algorithme de Kaprekar sur ces 5 premiers cas... et nous avons toujours trouvé 0 !

<u>Voici un des cas</u> : n = 18.

$$18 \rightarrow \begin{array}{r} 81 \\ -\ \underline{18} \\ 63 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 63 \\ -\ \underline{36} \\ 27 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 72 \\ -\ \underline{27} \\ 45 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 54 \\ -\ \underline{45} \\ 09 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 9 \\ -\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

Tous les autres cas apparaissent dans les résultats des soustractions.

III – <u>Nombres à trois chiffres</u>

Exemple : n = 365

$$\begin{array}{r} 653 \\ -\ \underline{356} \\ 297 \end{array} \quad \begin{array}{r} 972 \\ -\ \underline{279} \\ 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -\ \underline{369} \\ 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -\ \underline{459} \\ 495 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -\ \underline{459} \\ 495 \end{array} \quad \ldots$$

Pour n = 829

$$\begin{array}{r} 982 \\ -\ \underline{289} \\ 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -\ \underline{369} \\ 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -\ \underline{459} \\ 495 \end{array}$$

Pour n = 343

$$\begin{array}{r} 433 \\ -\ \underline{334} \\ 99 \end{array} \quad \begin{array}{r} 99 \\ -\ \underline{99} \\ 0 \end{array}$$

Pour un nombre à trois chiffres identiques on arrive à 0 en une étape, la démonstration reste la même que pour les nombres à deux chiffres.

Après de nombreux exemples, nous avons pu faire à nouveau deux conjectures dans le cas où les chiffres ne sont pas tous égaux.

Conjectures :
1 – Dans les différences obtenues, le nombre du milieu est 9 et la somme des deux chiffres des extrémités est 9 également.
2 – L'algorithme de Kaprekar appliqué à un nombre à trois chiffres amène à 0 ou 495.

Démonstrations :
1 – Soit n un entier de trois chiffres a, b et c non tous égaux. On suppose que a, b et c sont rangés dans l'ordre croissant (1); on a donc a > c.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ -\ c\ b\ a \\ \hline e\ f\ g \end{array}$$

On a : g = (10 + c) – a ; f = (10 + b) – (1 + b) et e = a – (c + 1)

Extrémités : e + g = a – (c + 1) + (10 + c) – a = a – c – 1 + 10 + c – a = –1 + 10 = 9
Intérieur : f = (10 + b) – (1 + b) = 10 + b – 1 – b = 10 – 1 = 9
Notre première conjecture est démontrée.
2 – Grâce à ce résultat, il ne nous reste que peu de cas à étudier. Ces cas sont tous des multiples de 99.

099 ou 990
198 ou 891
297 ou 792
396 ou 693
495 ou 594

Il y en a en tout 10 cas qui en fait se ramènent à 5 cas (297 et 792 vont donner les mêmes résultats).
Nous les avons tous testés et nous arrivons bien à 495 ou bien 0 pour les résultats valant 99.

$$\begin{array}{r} 990 \\ -\ 099 \\ \hline 891 \end{array} \quad \begin{array}{r} 981 \\ -\ 189 \\ \hline 792 \end{array} \quad \begin{array}{r} 972 \\ -\ 279 \\ \hline 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -\ 369 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 495 \\ -\ 459 \\ \hline 495 \end{array}$$

Dans cette opération, tous les cas sont exposés.
Le nombre maximum d'étapes pour arriver à 495 est 5 (on ajoute une opération au calcul ci-dessus, qui représente le premier calcul qu'on effectue).

III – Nombres à quatre chiffres

Exemple : n = 4932

$$\begin{array}{r} 9432 \\ -\ 2349 \\ \hline 7083 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8730 \\ -\ 0378 \\ \hline 8352 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8532 \\ -\ 0378 \\ \hline 6174 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7641 \\ -\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

Pour n = 8163

$$\begin{array}{r} 8631 \\ -\ 1368 \\ \hline 7263 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7632 \\ -\ 2367 \\ \hline 5265 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6552 \\ -\ 2556 \\ \hline 3996 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9963 \\ -\ 3699 \\ \hline 6264 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6642 \\ -\ 2466 \\ \hline 4176 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7641 \\ -\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

Pour n = 6552

$$\begin{array}{r} 6552 \\ -\ 2556 \\ \hline 6993 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9963 \\ -\ 3699 \\ \hline 6264 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6642 \\ -\ 2466 \\ \hline 4176 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7641 \\ -\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

Pour un nombre à quatre chiffres identiques on arrive à 0 en une étape (démonstration identique aux paragraphes précédents).

Conjectures :

1 – Dans les différences obtenues, la somme des deux chiffres du milieu vaut 8 ou 18 et la somme des deux chiffres des extrémités vaut alors respectivement 10 ou 9.

2 – L'algorithme de Kaprekar appliqué à un nombre à quatre chiffres amène à 0 ou 6174.

Démonstrations :

1 – Soit n un entier de quatre chiffres a, b, c et d non tous égaux. On suppose que a, b, c et d sont rangés dans l'ordre croissant (2); on a donc a > d.

1^er^ cas : b = c

$$\begin{array}{r} a\,b\,b\,d \\ -\ d\,b\,b\,a \\ \hline e\,f\,g\,\ h \end{array}$$

On a : h = (10 + d) – a ; g = (10 + b) – (b + 1) ; f = (10 + b) – (b + 1) et e = a – (d + 1)

Extrémités : e + h = a – (d + 1) + (10 + d) – a = a – d – 1 + 10 + d – a = – 1+10 = 9

Intérieur : f + g = (10 + b) – (b + 1) + (10 + b) – (b + 1) = 10 + b – b – 1 + 10 + b – b – 1= 18

f + g = 18 signifie que f = g = 9.

2^ème^ cas : b et c sont différents.

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ -\ d\,c\,b\,a \\ \hline e\,f\,g\,\ h \end{array}$$

On a : h = (10 + d) – a ; g = (10 + c) – (b + 1) ; f = b – (c + 1) et e = a – d

Extrémités : e + h = a – d + (10 + d) – a = a – d + 10 + d – a = 10

Intérieur : f + g = b – (c + 1) + (10 + c) – (b + 1) = b – c – 1 + 10 + c – b – 1= – 1 + 10 – 1 = 8.

2 – D'après notre première conjecture démontrée, après la première opération, il nous reste peu de cas à étudier. Nous allons tous les étudier pour démontrer que toutes les suites d'opérations arrivent à un même nombre : 6174.

Cas b = c (9 aux extrémités et 18 à l'intérieur).

Voici tous les cas possibles, il y en a 10 mais il suffit d'en étudier 5 comme nous l'avons déjà expliqué.

1998 ou 8991	2997 ou 7992	3996 ou 6993	4995 ou 5994	0999 ou 9990
9981 -1899 8082 8820 -0288 8532 8532 -2358 **6174** 7641 -1467 **6174**	9972 -2799 7173 7731 -1377 6354 6543 -3456 3087 8730 -0378 8352 8532	9963 -3699 6264 6642 -2466 **4176** 7641 -1467 **6174**	9954 -4599 5355 5553 -3555 1998 9981 (on retrouve le premier nombre de la première colonne)	9990 -0999 8991 9981

Cas b différent de c (10 aux extrémités et 8 à l'intérieur).
Il y en a 64 qui se ramènent en fait à 16 cas. Pour chacun des 16 cas, on trouve 3 cas équivalents en inversant soit les chiffres des extrémités soit les deux chiffres intérieurs. Ainsi : 9081 donnera le même algorithme que 1089, 1809 ou 9801.
Voici les 16 cas restants à étudier :

9 08 1 8 08 2 7 08 3 6 08 4	9 17 1 8 17 2 7 17 3 6 17 4	9 26 1 8 26 2 7 26 3 6 26 4	9 35 1 8 35 2 7 35 3 6 35 4

nous avons appliqué notre algorithme sur tous ces cas et nous arrivons bien à 6174.

IV – Prolongation de nos recherches

Nous avons créé un programme avec le logiciel Scratch qui nous a permis de donner rapidement les résultats successifs des soustractions pour un nombre à n chiffres donné. Nous avons obtenu des résultats encore étonnants que nous n'avons pas encore démontrés.

1) Pour un nombre à 5 chiffres on obtient 0 ou bien deux suites provenant des résultats des soustractions qui se répètent :

82 962 75 933 63 954 61 974 82 962 ...	74 943 62964 71973 83952 74943 ...

Si on regarde chacun de ces résultats :
- Le chiffre de milieu est 9.
- La somme des chiffres des extrémités est 10.
- La somme des deux autres chiffres est 8.

Nous devons donc pouvoir démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement identique au III.

2) Pour un nombre à 6 chiffres on obtient 0 ou 631764 ou bien encore une suite provenant des résultats des soustractions qui se répètent :

851 742
750 843
840 852
860 832
862 632
642 654
420 876
851742

Nous remarquons encore que pour tous ces résultats :
- La somme des chiffres intérieurs est 8.
- La somme des chiffres des deux extrémités est 10.
- La somme des deux autres chiffres est 9.

Notes d'édition

(1) Les chiffres a, b et c sont rangés dans l'ordre décroissant.
(2) Idem pour les chiffres a, b, c et d.